HÖGSKOLAN
I GÄVLE
ATM-Matematik
Mikael Forsberg
—

Matematik med datalogi, mfl.

FLERVARIABELANALYS
mk012b
Övningstenta vt2013 nr2

Skrivtid: 5 timmar. Hjälpmedel är formelbladen från insidan av Pärmen i Adams Calculus, dessa formler bifogas tentan.
Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa. Börja varje ny uppgift på ny sida.
Använd ej baksidor. Skriv namn på varje inlämnat blad.

1. Bestäm längden för den parametriska kurvan $\gamma(t) = (2\cos 3t, 2sin3t, t)$ (en helixkurva) då $t \in [0, 2\pi]$
2. Terrängen kring ett område ges med god approximation av grafen till funktionen
$$f(x, y) = x^2 - 2y^2 + x + 1$$
Om vi befinner oss i punkten $(1, 1)$ och vill förflytta oss till punkten $(-1, 2)$. Vad är lutningen om vi försöker röra oss fågelvägen mot destinationspunkten?
3. Beräkna de punkter på kurvan $17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100$ som ligger närmast origo och längst bort från origo.
4. Beräkna dubbelintegralen $\int_R (x^2 + y^2)dA$, där R är det område i första kvadranten som begränsas av $y = 0$, $y = x$, $xy = 1$ och $x^2 - y^2 = 1$.
5. Beräkna
$$\iiint_R z dV$$
där R är de punkter som uppfyller $x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}$.
6. Beräkna flödet av fältet $\mathbf{F} = (x, x, 1)$ uppåt genom den del av ytan $z = x^2 - y^2$ som ligger innanför cylindern $x^2 + y^2 = a^2$
7. Beräkna arbetet som kraftfältet $\mathbf{F} = (P(x, y), Q(x, y)) = (y + 3x, 2y - x)$ utverkar när en partikel förs ett varv moturs runt ellipsen E, vars randkurva ∂E uppfyller ekvationen $4x^2 + y^2 = 4$.
8. Beräkna $\oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ där $\mathbf{F} = (-y, x^2, z)$ och C är den orienterade randen av dem del av paraboloiden $z = 9 - x^2 - y^2$ som ligger ovanför xy-planet och som har ett normalfält som pekar uppåt.

Svar till tentamen i Flervariabelanalys, Övningstenta vt2013 nr2.

1. Längden blir $2\pi\sqrt{37}$.

2. $\frac{10}{\sqrt{5}}$

3.

4.

5.

6.

7.

8.

Lösningar till tentamen i Flervariabelanalys, Övningstenta vt2013 nr2.

1. Beräkna först derivatan till parametriseringen $\gamma'(t) = (-6\sin 3t, 6\cos 3t, 1)$. Längden l av kurvan beräknas som integralen av $||\gamma'(t)||$ över intervallet $[0, 2\pi]$, dvs

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{36\sin^2 3t + 36\cos^2 3t + 1}dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{36+1}dt = 2\pi\sqrt{37},$$

där vi i den andra likheten använt trigonometriska ettan.

2. Vi ska röra oss i riktningen $v = (-1, 2) - (1, 1) = (-2, 1)$ och lutningen ges då av riktningsderivatan i enhets riktningen $u = v/||v|| = \frac{(-2,1)}{\sqrt{5}}$ Riktningsderivatan ges av skalärprodukten av u och gradienten för f i $(1, 1)$ som blir

$$\nabla f|_{(1,1)} = (2x + 1, -4y)|_{(1,1)} = (3, -4)$$

Lutningen blir alltså

$$u \bullet \nabla f|_{(1,1)} = \frac{(-2, 1) \bullet (3, -4)}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}}$$

3. Kurvan är en ellips som lutar i förhållande till axlarna och vi söker ändpunkterna på ellipsens huvudaxlar. Problemet skulle kunna formuleras mha linjär algebra och kurvan kan då beskrivas mha en symmetrisk matris som kan diagonaliseras. Den diagonaliserande matrisen ger oss då ett koordinatbyte som utför diagonaliseringen. Efter koordinatbytet så får vi ellipsen på standardform och då är det lätt att beräkna ändpunkterna.

Nu är detta en tentamen i Flervariabelanalys och här förstår vi att vi ska minimera avståndsfunktionen (i kvadrat) $x^2 + y^2$ givet att vi befinner oss på ellipskurvan. Problemet kan formuleras mha Lagrangefunktionen

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(17x^2 + 12xy + 8y^2 - 100)$$

Problemets kritiska punkter återfinns bland Lagrangefunktionens kritiska punkter som vi hittar genom att beräkna $\nabla L = 0$ som ger oss systemet

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda(34x + 12y) \quad (1)$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda(12x + 16y) \quad (2)$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 17x^2 + 12xy + 8y^2 - 100 \quad (3)$$

Vi löser ut λ från de två första ekvationerna och sätter dem lika. Detta ger

$$\frac{-2x}{34x + 12y} = \frac{-2y}{12x + 16y} \quad \Rightarrow \quad 12x^2 + 16xy = 34xy + 12y^2 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - 3xy - 2y^2 = 0 \quad (4)$$

Multiplicera nu det sista uttrycket med 4 och sätt in i ekvation (3) så får vi $25x^2 = 100$, dvs $x = \pm 2$ Sätt slutligen in vardera av dessa två värden in i ekvation (3) och lös ut y. Detta ger oss att

$$x = 2 \quad \Rightarrow \quad y = 1 \text{ eller } y = -4$$
$$x = -2 \quad \Rightarrow \quad y = -1 \text{ eller } y = 4$$

Vilket således ger oss de kritiska punkterna $(2, 1)$, $(2, -4)$, $(-2, -1)$ och $(-2, 4)$ Uppenbart får vi att punkterna $\pm(2, -4)$ ligger längst bort från origo och att punkterna $\pm(2, 1)$ ligger närmast origo.

4. Vi kan se att integrationsområdet beskrivas som liggandes mellan $x^2 - y^2 = 0$ (detta är $x = y$) och $x^2 - y^2 = 1$ samt mellan $xy = 0$ (dvs $y = 0$) och $xy = 1$. Därför är det lämpligt att göra ett variabelbyte $u = x^2 - y^2$ och $v = xy$ som ger att vi ska integrera över området $0 < u < 1$, $0 < v < 1$ i $u - v$ planet. Vi utför detta variabelbyte i vår integral: Vi noterar först att variabelbytet är en funktion $F(x, y) = (x^2 - y^2, xy)$ och att integralen

$$\int dudv = \int \det DF dxdy = \int 2(x^2 + y^2)dxdy$$

eftersom Jakobideterminanten blir

$$\det DF = \det \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{pmatrix} = 2(x^2 + y^2).$$

Vår integral blir alltså

$$\int x^2 + y^2 dxdy = \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^1 dudv = \frac{1}{2}$$

5. Om vi använder cylindriska koordinater har vi att $r^2 = x^2 + y^2$ och vi får därför att vårt område ges av olikheterna $r^2 \leq z \leq \sqrt{2 - r^2}$. Skärningen mellan de två ytorna ger oss ekvationen $r^4 = 2 - r^2$, dvs $r^4 + r^2 - 2$ som ger oss en enda positiv reell lösning $r = 1$ Vi kan nu skriva integralen som

$$\iiint_R zdV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} rzdzdrd\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \int_0^1 (2 - r^2 - r^4)rdrd\theta = \frac{7\pi}{12}$$

6. Ytan parametriseras av $r(x, y) = (x, y, x^2 - y^2)$ vilket ger att

$$NdS = \frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} dxdy = (-2x, 2y, 1)dxdy$$

Vi har nu att

$$F \bullet NdS = (-2x^2 + 2xy + 1)\ dxdy$$

så att flödet blir

$$\begin{aligned}
\iint_S F \bullet NdS &= \iint_{x^2+y^2\leq a^2} -2x^2 + 2xy + 1dxdy = \\
&= -2 \underbrace{\iint_{x^2+y^2\leq a^2} x^2 dxdy}_{\text{polära koord på denna!}} + 2 \underbrace{\iint_{x^2+y^2\leq a^2} xydxdy}_{=0 \text{ pga symmetri}} + \underbrace{\underbrace{\iint_{x^2+y^2\leq a^2} dxdy}_{\text{arean av cirkelskivan}}}_{=\pi a^2} = \\
&= -2\int_0^{2\pi} \int_0^a r^3 \cos^2 t drdt + \pi a^2 = \cdots = \pi a^2 - \pi a^4/2
\end{aligned}$$

7. Arbetet ges av integralen $\int Pdx + Qdy$. Eftersom $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2$ så ger Greens sats oss följande

$$\int_{\partial E} Pdx + Qdy = \iint_E -2dxdy = -2 \text{ ellipsens area } = -2ab\pi,$$

där a och b är ellipsens huvudaxlar: Ellipsen på standardform är $x^2 + (\frac{y}{2})^2 = 1$, så $a = 1$ och $b = 2$ vilket ger att arbetet blir -4π.

8. Här är tricket att ytans randkurva är randkurva till en enklare yta och vi kan utnyttja Stokes sats för denna enklare yta. Paraboloiden skär $x-y$-planet i cirkeln $x^2+y^2=9$. Denna cirkel är förstås randkurva till skivan D som definieras av $x^2+y^2 \leq 9$ och denna skiva har den uppåtriktade normalen $(0,0,1)$. Rotationen av fältet $\mathbf{F}=(-y,x^2,z)$ blir

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x^2 & z \end{pmatrix} = (0,0,2x+1)$$

Vi får nu via Stokes sats att

$$\int \mathbf{F} \bullet \mathbf{r} = \iint_D \nabla \times \mathbf{F} \bullet (0,0,1) dA = \iint_D (2x+1) dA = 0 + \pi(3^2) = 9\pi.$$