HÖGSKOLAN I GÄVLE
TM-Matematik
Mikael Forsberg
—

Matematik med datalogi, mfl.

FLERVARIABELANALYS
mk012b
Övningstenta vt2013 nr1

Skrivtid: 5 timmar. Hjälpmedel är formelbladen från insidan av Pärmen i Adams Calculus, dessa formler bifogas tentan.
Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa. Börja varje ny uppgift på ny sida. Använd ej baksidor. Skriv namn på varje inlämnat blad.

1. Beräkna gradienten i $p_0 = (x, y, z) = (1, 1, 1)$ till funktionen $f(u, v, w) = u^2v + vw$ där
$$u = xy^2, \quad v = y + z^2, \quad w = xyz^2$$

2. Beräkna och klassificera de kritiska punkterna till
$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1).$$

3. Hitta maximala arean för en rektangel inskriven i en ellips på formen
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$
En utgångspunkt bör vara att rektangeln är parallell med ellipsens huvudaxlar.

4. Beräkna flödet av fältet $\mathbf{F} = (3x, z - x, y + x^2)$ genom ytan $\mathcal{S}$ av parallellepipeden som spänns av vektorerna $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, -1)$ och $v_3 = (1, -2, 1)$.

5. Beräkna linje integralen av vektorfältet $\mathbf{F} = (2x + y^2, 2xy)$ längs kurvan C som parametriseras av
$$\mathbf{r}(t) = (-t\cos(\pi t), \sin(\pi t)), \quad 0 \le t \le 1$$
från $(0, 0)$ till $(1, 0)$

6. Beräkna $\iiint_D (x^2+y^2+z^2)dxdydz$, där D är enhetsklotet som definieras av $x^2+y^2+z^2 \leq 1$.

7. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (x, y, 3)$ ut från området T som begränsas nedåt av paraboloiden $z = x^2 + y^2$ och uppåt av planet $z = 4$. Se figur 1

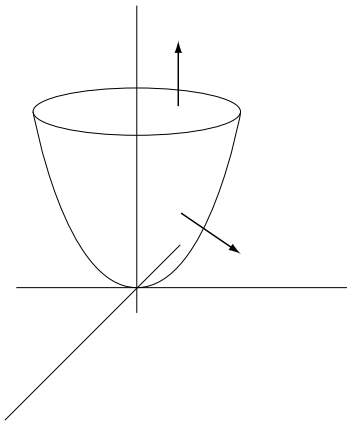

Figure 1: Området T i uppgift 5. Pilarna markerar områdets ytas yttre normaler.

8. Beräkna kurvintegralen

$$\oint_\gamma (2xy - x^2 + y^2 \sin xy^2)dx + (x + y^2 + 2xy \sin xy^2)dy,$$

där γ är den positivt orienterade randkurvan till området $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$.

Svar till tentamen i Flervariabelanalys, Övningstenta vt2013 nr1.

1. $\nabla f|_{p_0} = (6, 12, 8)$

2. $(0, 0)$ är enda kritiska punkten och denna är ett lokalt minimum.

3. Maximala arean blir 1.

4. Flödet blir 18

5. Man verifierar lätt att fältet är konservativt och är därför oberoende av vilken väg man integrerar efter.

6. Integralen blir $4\pi/5$

7. Flödet blir 16π

8. Integralen blir $1/30$

Lösningar till tentamen i Flervariabelanalys, Övningstenta vt2013 nr1.

1. Vi behöver beräkna $\nabla f = (\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z)$. Kedjeregeln ger

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} = 2xy^4\left(y+z^2\right) + yz^2\left(y+z^2\right)\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} = x^2y^4 + 4x^2y^3\left(y+z^2\right) + xyz^2 + xz^2\left(y+z^2\right)\\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z} = 2x^2y^4z + 2xyz^3 + 2xyz\left(y+z^2\right)
\end{aligned}$$

Uträknat i p_0 så får vi att

$$\nabla f|_{p_0} = (6, 12, 8)$$

2. Kritiska punkter ger att gradienten blir noll. Vi beräknar gradienten

$$\nabla f = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}\right)$$

De båda komponenterna är noll precis om både $x = 0$ och $y = 0$. För att klassificera kritiska punkten så beräknar vi andraderivatorna

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{-2x^2+2y^2+2}{\left(x^2+y^2+1\right)^2} = \text{ i kritiska punkten } 2\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{-2x^2+2y^2+2}{\left(x^2+y^2+1\right)^2} = \text{ i kritiska punkten } = 2\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= -\frac{4xy}{\left(x^2+y^2+1\right)^2} = \text{ i kritiska punkten } = 0
\end{aligned}$$

Eftersom andra derivatan m.a.p. första variabeln är positiv och determinanten för Hessianen är större än noll (den är 4) så ger andraderivatatestet att den kritiska punkten $(0, 0)$ är ett lokalt minimum.

3. Utgående från situationen i figur 2 så har vi att x och y är ickenegativa och att arean för den inskrivna rektangeln är fyra gånger arean för den lilla rektangeln i första kvadraten. vår area är alltså

$$A(x, y) = 4xy.$$

Denna areafunktion ska optimeras givet att punkten (x, y) ligger på ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Vi kan beskriva problemet som att vi ska hitta kritiska punkter för Lagrangefunktionen

$$L(x, y, \lambda) = 4xy - \lambda(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2)$$

där vi skrivit om ellipsekvationen (1) genom att multiplicera båda led med a^2b^2. Omskrivningen gör att vi slipper bråkräkning i några av de uttryck som följer. För en kritisk punkt så ska första ordningens partialderivator vara noll:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= 4y - 2\lambda b^2x = 0 \quad \Rightarrow \lambda = \frac{2y}{b^2x}\\
\frac{\partial L}{\partial y} &= 4x - 2\lambda a^2y = 0 \quad \Rightarrow \lambda = \frac{4x}{a^2y}\\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} & b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2
\end{aligned}$$

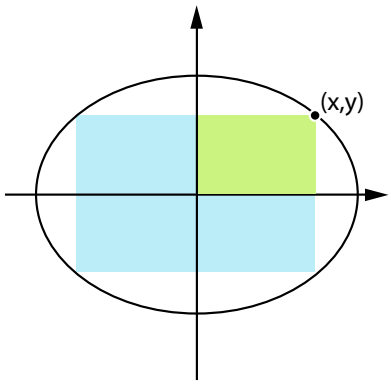

Figure 2: Ellipsen och den inskrivna rektangeln för vår uppgift.

De två första ekvationerna ger att $b^2x^2 = a^2y^2$ som leder till att $x = ay/b$. Sätter vi in detta i ellipsens ekvation (som ju är tredje villkoret, derivatan med avseende på λ så får vi

$$x^2 = a^2/2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a}{\sqrt{2}},$$

(den negativa lösningen förkastas här eftersom vi söker positiv lösning). Från detta följer det direkt att $y = \frac{b}{\sqrt{2}}$ och arean blir $4xy = 2$.

4. Flödet bestäms av flödesintegralen

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S}$$

Ytan består av 6 delar och det blir långa räkningar om vi ska utföra dessa genom direkta räkningar. Här måste vi vara smarta och använda Gauss sats (divergenssatsen). Denna sats ger oss att

$$\iiint_{\mathcal{V}} \nabla \bullet \mathbf{F} dV = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S},$$

där $\mathcal{V}$ är volymen som ytan $\mathcal{S}$ innesluter.

I vårt fall har vi att

$$\nabla \bullet \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 3 + 0 + 0 = 3$$

Vi får därför att integralen över volymen blir

$$\iiint_{\mathcal{V}} \nabla \bullet \mathbf{F} dV = \iiint_{\mathcal{V}} 3 dV = 3 \cdot \underbrace{\text{volymen av } \mathcal{V}}_{=V}$$

Volymen av parallellepipeden ges av determinanten

$$V = \left| \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \right| = 6$$

En observant tentand noterar förståss att de tre vektorerna är ortogonala så vi har också att

$$V = ||v_1|| \cdot ||v_2|| \cdot ||v_3|| = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = 6$$

Hur som helst får vi således att flödet genom ytan blir $3 \cdot 6 = 18$.

5. Direkt integration

$$\int_C \mathbf{F} \bullet \mathbf{r}' dt$$

blir ganska komplicerat. Eftersom vi har att

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

så är fältet konservativt och är inte beroende av vilken väg vi integrerar över. Vi kan därför integrera längs med segmentet s på x-axeln från 0 till 1. Parametriseringen blir:

$$\gamma(t) = (t, 0), \quad \Rightarrow \quad \gamma'(t) = (1, 0)$$

Integralen blir då

$$\int_s \mathbf{F}(\gamma(\mathbf{t})) \bullet \gamma' dt = \int_0^1 (2t, 0) \bullet (1, 0) dt = \int_0^1 2t dt = t^2|_0^1 = 1$$

Alternativt så kan beräkna potential funktionen $\phi(x, y)$ (som finns eftersom vi har ett konservativt fält och och den kan beräknas ur egenskapen att $\mathbf{F} = \nabla\phi$.) Denna potentialfunktion blir $\phi(x, y) = x^2 + y^2 x$ och med denna får vi att

$$\int_C \mathbf{F} \bullet \mathbf{r}' dt = \phi(1, 0) - \phi(0, 0) = 1 - 0 = 0$$

6. Idén är att använda sfäriska koordinater och då blir integralen

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cdot |r^2 \sin\phi| dr d\theta d\phi = \cdots = \frac{4\pi}{5}$$

7. Det totala flödet är summan av flödet genom den övre cirkelskivan S_1 som definieras av $x^2 + y^2 \leq 4$ och flödet genom paraboloiddelens randyta S_2.

Vi beräknar först flödet genom S_1 som har normalvektor $\mathbf{n_1} = (0, 0, 1)$.
Flödet genom S_1 blir

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n_1} dS = \iint_{S_1} 3 dS = 3 \cdot \text{cirkelskivans area} = 12\pi$$

För paraboloiden så är det viktigt att se till att vi får en *yttre* normal till S_2. Eftersom ytan är grafen till funktionen $z = x^2 + y^2$ så har den en naturlig parametrisering $\sigma(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$. En normalvektor till ytan blir kryssprodukten av parametriseringens partialderivator

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \times \frac{\partial \sigma}{\partial y} = (-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1) = (-2x, -2y, 1)$$

men denna pekar inåt i figuren. Yttre enhetsnormalvektor blir i stället $\mathbf{n_2} = -\mathbf{N}/|\mathbf{N}|$ som alltså har motsatt riktning mot N. Ytelementet blir $dS = |\mathbf{N}| dx dy$

Flödet genom S_2 blir nu

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n_2} dS =$$

$$-\iint_D \mathbf{F} \bullet \mathbf{N}/|\mathbf{N}||\mathbf{N}| dx dy = \iint_D (2x^2 + 2y^2 - 3) dx dy = [\text{ polära koordinater }] =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 2r^2 - 3) r dr d\theta = 4\pi.$$

Totala flödet blir alltså $12\pi + 4\pi = 16\pi$.

8. Idén är att använda Greens sats och överföra det hela till en dubbelintegral som blir

$$\iint_D (1 - 2x) dx dy = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (1 - 2x) dy dx = \cdots = \frac{1}{30}$$