HÖGSKOLAN I GÄVLE
ATM-Matematik
Mikael Forsberg

Flervariabelanalys
ma012b
Inlämningsuppgift 4

Skickas in med epost: mfg@hig.se eller lämnas vid en föreläsning

$\boxed{\text{Deadline:: 2014 05 21}}$

1. Beräkna kortaste avståndet från origo till nivåytan
$$\frac{x^2+y^2}{2} - z^2 = 1$$

2. Beräkna den största volymen av en rektangulär låda, innesluten i ellipsoiden
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$
och som har sidorna parallella med koordinatplanen. Se figur:

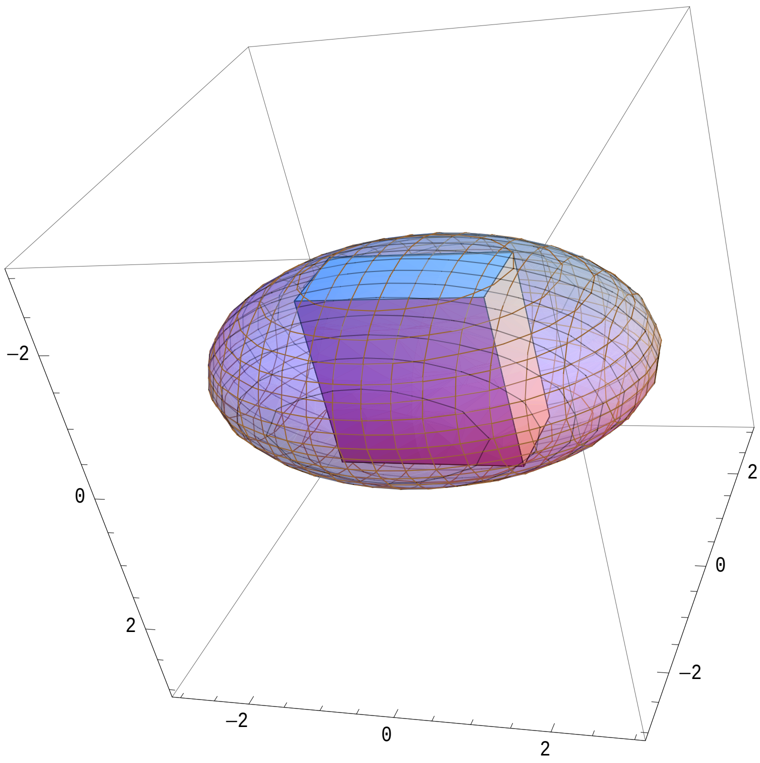

Figure 1: Figur till uppgift 2

⟶ En till uppgift på nästa sida.

3. Beräkna största och minsta värde som den kvadratiska formen

$$q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

kan anta på cirkeln $x^2 + y^2 = 1$.

Detta problem kan möjligen bli knepig att lösa direkt. Gör lösningen enligt följande steg:

(a) Diagonalisera formen mha en ortogonal matris. Den diagonaliserande matrisen P är då en ortogonal matris som utför (det ortogonala) koordinatbytet

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

(b) Vårt max/min problem kommer nu att överföras till de nya koordinaterna men vi behöver även transformera bivillkorscirkeln mha detta koordinatbyte. Skriv alltså bilvillkorets uttryck i de nya koordinaterna.

(c) Lös det nya problemet. Hur kommer egenvärdena in?

(d) Utför ovanstående procedur för den konkreta kvadratiska formen

$$q(x, y) = 29x^2 + 6xy + 21y^2$$

Vad blir alltså största och minsta värdet för denna kvadratiska form på cirkeln

$$x^2 + y^2 = 1?$$

Hint :: De tre första deluppgifterna handlar om att komma på idén till följande sats och utföra några motiverande steg:

Sats :: Låt A vara en symmetrisk matris med egenvärden ordnade enligt

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n.$$

Om $\mathbf{x}$ uppfyller bivillkoret $||\mathbf{x}|| = 1$ så gäller att den kvadratiska formen $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$

$$\lambda_1 \geq \mathbf{x}^T A\mathbf{x} \geq \lambda_n$$

Den kvadratiska formens maximium är alltså det största egenvärdet och dess minimum är det minsta egenvärdet.