HÖGSKOLAN
I GÄVLE
ATM-Matematik
Mikael Forsberg
0734-41 23 31

Matematik med datalogi, mfl.

FLERVARIABELANALYS
ma012b
2015 02 26

Skrivtid: 09:00-14:00. Inga hjälpmedel (förutom bifogade formelblad). Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa. Börja varje ny uppgift på ny sida.
Använd ej baksidor. Skriv namn på varje inlämnat blad.

1. Beräkna och klassificera alla kritiska punkter till
$$f(x, y, z) = xye^{-(x^2+y^2)/2}$$

2. Beräkna de punkter på kurvan
$$17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100$$
som är längst bort respektive närmast origo.

3. Beräkna dubbelintegralen
$$\iint_D e^{-x} dA,$$
där A triangeln i xy-planet som begränsas av de tre linjerna $x = 1$, $x = 2$ och $y = x$.

Ett litet fel i uppgiftsformuleringen: det skulle varit $y = 1$ istället för $x = 1$

4. Beräkna arean av den del av planet som begränsas av de fyra parablerna $y = x^2$, $y = 2x^2$, $x = y^2$, $x = 3y^2$. Hint :: det är bra att göra ett variabelbyte så att man integrerar över en rektangel i de nya koordinaterna.

5. Låt
$$f(x, y, z) = x^2 e^{-yz}.$$
Beräkna hur snabbt funktionen växer i riktningen $v = (1, 1, 1)$ när vi befinner oss i punkten $p = (1, 0, 0)$.

6. Beräkna integralen

$$\iiint_W e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dV,$$

där W är det som är kvar av enhetsklotet när vi skurit ut en klyfta med vinkeln $\pi/4$, se figur 1.

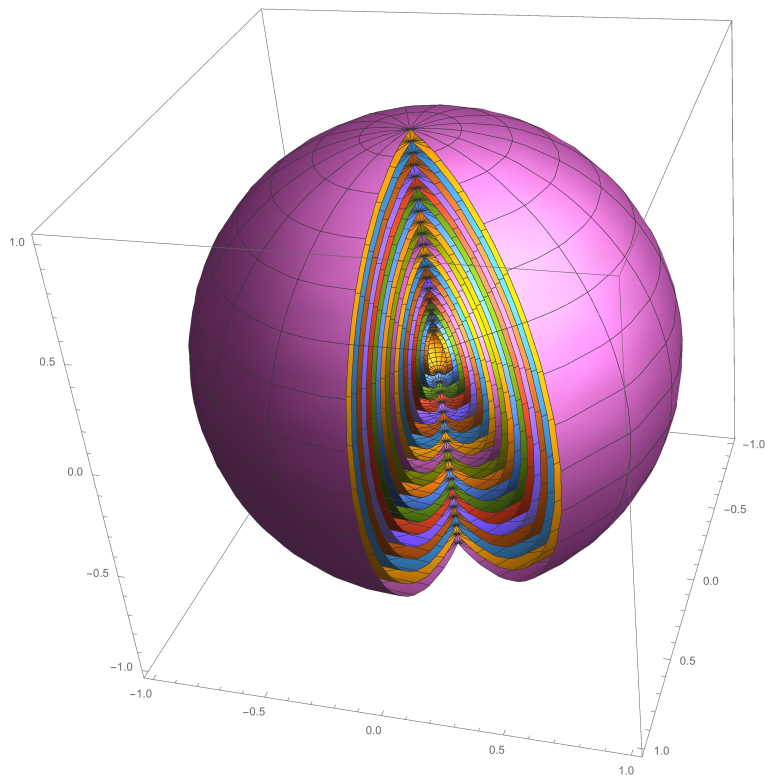

Figure 1: Sfären i uppgift 6

7. Visa att vektorfältet

$$F(x, y, z) = (e^{yz} + y \sin z, xze^{yz} + x \sin z, xye^{yz} + xy \cos z)$$

är konservativt och beräkna en potential för fältet.

8. Låt $F = (2z, x, y)$ vara ett vektorfält. och S det övre halvan av enhetssfären som har enhetscirkeln i xy-planet som randkurva.

   (a) Formulera Stokes sats.

   (b) Visa med explicita räkningar att de två sidorna är lika, dvs

      i) Beräkna linjeintegralen som är ena sidan av Stokes

      ii) Beräkna ytintegralen som är den andra sidan av Stokes sats.

      iii) Checka av att de är lika!

Svar till tentamen i Flervariabelanalys, 2015 02 26.

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

Lösningar till tentamen i Flervariabelanalys, 2015 02 26.

1. Se Adams Edition 8 sidan 750 (exempel 8 i kapitel 13.1)

2. Se Adams 13.3 ex 2 (sidan 761 i Adams ed 8)

3. Integrationsområdet är $D = \{(x, y) : y < x < 2, 1 < y < x\} = \{1 < y < x, 1 < x < 2\}$, vilket ger oss integrationen

$$\int_1^2 \int_1^x e^{-x} dy dx = \int_1^2 e^{-x} \left[y\right]_1^x dx = \int_1^2 e^{-x}[x-1]dx = \cdots = \frac{e-2}{e^2}$$

4. Se Adams Ed 8 sidan 832. Exempel 8 i avsnitt 14.4.

5. Hur snabbt funktionen växer i en viss riktning ges av riktningsderivatan. Riktningsderivatan beräknas genom att ta skalärprodukten av gradienten (uträknad i den aktuella punkten) och en enhetsvektor i den aktuella riktningen,.

Enhetsvektor i riktningen är

$$e_v = \frac{v}{||v||} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1).$$

Gradienten är

$$\nabla f = (2xe^{-yz}, -zx^2e^{-yz}, -yx^2e^{-yz})$$

Gradienten uträknad i $p = (1, 0, 0)$ ::

$$\nabla f|_p = (2, 0, 0)$$

Riktningsderivatan blir

$$\nabla f|_p \bullet e_v = (2, 0, 0) \bullet \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

6. W ges i sfäriska koordinater av

$$W = \{0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta < 7\pi/4\},$$

vilket ger att vår integral blir

$$\begin{aligned}
\iiint_W e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dV &= \int_0^{7\pi/4} \int_0^{\pi} \int_0^1 e^{\rho^3} \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta = \\
&= \int_0^{7\pi/4} \int_0^{\pi} \frac{(e-1)}{3} \sin\phi d\phi d\theta = \int_0^{7\pi/4} \underbrace{\left[-\cos\phi\right]_0^{\pi}}_{=2} d\theta = \\
&= \frac{2(e-1)}{3} \int_0^{7\pi/4} d\theta = \frac{7(e-1)\pi}{6}
\end{aligned}$$

7. Ett fält är konservativt precis om man kan finna en sådan potential. Om $\Phi(x, y, z)$ är en potential så har vi

$$\nabla\Phi = F,$$

dvs

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi}{\partial x} &= e^{yz} + y\sin z \\
\frac{\partial\Phi}{\partial y} &= xze^{yz} + x\sin z \\
\frac{\partial\Phi}{\partial z} &= xye^{yz} + xy\cos z)
\end{aligned}$$

Genom att integrera dessa ekvationer så är det inte svårt att se att

$$\Phi(x, y, z) = xe^{yz} + xy\sin z$$

är en potential för vårt fält, vilket alltså innebär att fältet är konservativt.

8. Uppgiften är lånad från video på MIT opencourseware kurs 18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010 ::

http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/4.-triple-integrals-and-surface-integrals-in-3-space/part-c-line-integrals-and-stokes-theorem/session-91-stokes-theorem/