HÖGSKOLAN
I GÄVLE
ATM-Matematik
Mikael Forsberg och Yury Shestopalov
0734-41 23 31 (Mikael Forsberg)

Campus och distans
FLERVARIABELANALYS
mag312
2017 06 05

Skrivtid: 09:00-14:00. Inga hjälpmedel förutom bifogad formelsamling. Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa. Börja varje ny uppgift på ny sida.
Använd ej baksidor. Skriv namn på varje inlämnat blad.

1. Antag att $f(x,y) = e^{xy}$, $x(u,v) = 3u\sin v$ och $y(u,v) = 4v^2u$. Låt
$$g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v)).$$
Beräkna partialderivatorna $\partial g/\partial u$ och $\partial g/\partial v$.

2. I vilka punkter på enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$ antar funktionen $f(x,y) = xy$ sitt absoluta maximum och i vilka punkter antar funktionen sitt absoluta minimum?

3. Beräkna ytintegralen $\iint_\sigma xz dS$, där σ är den del av planet $x + y + z = 1$ som ligger i första oktanten.

4. Beräkna flödet av fältet $F = (3y\cos z, x^2e^z, x\sin y)$ genom begränsnings-ytan för klotet Q som har centrum i $(0,0,1)$ och har radie $R = 1$.

5. Beräkna volymen av den kropp som begränsas av grafytan $y = 4 - x^2 - z^2$ och xz-planet.

6. Låt $\bar{F} = \left[ax^3, by^2, cz^2\right]$, $a, b, c \neq 0$, vara ett vektorfält och vektorn $\bar{A} = \left[b, a, \frac{ab}{c}\right]$.

Bestäm alla punkter sådana att graddiv $\bar{F}$ är vinkelrät mot $\bar{A}$.

7. Låt

$$\begin{cases} xu + yv = x + y, \\ yu - xv = x - y, \end{cases} \tag{1}$$

Bestäm partialderivatorna u_x, u_y, v_x och v_y, samt vektorn $\operatorname{grad} u$ i punkten $(x, y) = (1, 2)$.

8. Låt

$$\begin{aligned} f(u, v) &= \frac{u}{v} + \frac{u-1}{v+1} - \sqrt{u^2 + v^2} \\ u &= u(x, y) = xy \quad \text{och} \\ v &= v(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

(a) Bestäm definitionsmängder av $f(u, v)$ som en funktion av u, v och som en funktion av x, y.

(b) Visa att gränsvärdena

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(u, v) \quad \text{och} \quad \lim_{(x,y)\to(1,-1)} f(u, v)$$

existerar och bestäm deras värde.

(c) Visa att $f(u, v)$ är kontinuerlig på sin definitionsmängd som en funktion av x, y.

Svar till tentamen i Flervariabelanalys, 2017 06 05.

Lösningar till tentamen i Flervariabelanalys, 2017 06 05.

1. Vi har att

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= ye^{xy}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}, \\
\frac{\partial x}{\partial u} &= 3\sin v, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 4v^2, \\
\frac{\partial x}{\partial v} &= 3u\cos v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 8vu,
\end{aligned}$$

Kedjeregeln ger

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial u} = \\
&= ye^{xy}(3\sin v) + xe^{xy}(4v^2) = \\
&= [\text{använd } x = x(u,v), \text{ och } y = y(u,v)] = [\cdots] = \\
&= 24v^2ue^{12u^2v^2\sin v}\sin v
\end{aligned}$$

och på samma sätt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial v} = \\
&= [\cdots] = \\
&= 12u^2ve^{12u^2v^2\sin v}(v\cos v + 2\sin v)
\end{aligned}$$

2. Max och min existerar eftersom enhetscirkeln är sluten och begränsad. Vi ställer upp Lagrangefunktionen:

$$L(x,y,\lambda) = xy - \lambda(x^2+y^2-1)$$

Gradienten för lagrangefunktionen är noll i de punkter vi söker:

$$\begin{aligned}
\partial L/\partial x &= y - 2\lambda x = 0 && (2)\\
\partial L/\partial y &= x - 2\lambda y = 0 && (3)\\
\partial L/\partial \lambda &= x^2+y^2-1 = 0 && (4)
\end{aligned}$$

Vi löser ut λ ur (2) och (3) :

$$\frac{y}{2x} = \lambda = \frac{x}{2y} \quad \Rightarrow \quad x^2 = y^2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm y \tag{5}$$

Sätter vi in detta i bivillkoret (4) så får vi

$$2x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

För varje x-värde får vi nu två y-värden och det ger oss totalt sett fyra punkter:

$$(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}) : (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$$

Största värdet för funktionen xy är $1/2$ och inträffar när båda variablerna har samma tecken dvs i de två punkterna $\pm(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. I de två övriga punkterna $\pm(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ har variablerna olika tecken och där har vi minimum $-1/2$.

3. Vi kan beskriva planet som grafen till funktionen $z = 1 - x - y$. Den del av grafen vi är intresserad av ligger ovanför den y-enkla triangeln

$$T = \{(x, y) : 0 < y < 1 - x, 0 < x < 1\}$$

Eftersom areaelementet kan skrivas som

$$dS = \sqrt{(\partial z/\partial x)^2 + (\partial z/\partial y)^2 + 1}dydx = \sqrt{3}dydx,$$

så blir vår yt-integral

$$\iint_T xzdS = \sqrt{3}\int_0^1 \int_0^{1-x} x(1 - x - y)dydx = \sqrt{3}\int_0^1 x(1 - x)^2 - \frac{x(1 - x)^2}{2}dx$$
$$= \int_0^1 \frac{x}{2} - x^2 + \frac{x^3}{2}dx = [\cdots] = \sqrt{3}/24$$

4. Divergensen av fältet är noll. Gauss sats ger då att

$$\iint_{\partial Q} F \bullet ndS = \iiint_Q \underbrace{\nabla \bullet F}_{=0} dV = 0$$

5. Betrakta området som y-enkelt:

$$\{(x, y, z) : 0 < y < 4 - x^2 - z^2, x^2 + z^2 < 4\}.$$

Då kan volymen beskrivas som följande trippelintegral, där vi använder polära koordinater för att beskriva mängden i xz-planet

$$\iint_{x^2+z^2<4} \int_0^{4-x^2-z^2} dydxdz = [\text{ Polära koordinater }] = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{4-r^2} rdydrd\theta =$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r(4 - r^2)drd\theta = [\cdots] = 8\pi$$

6. Vi har

$$\text{div } \bar{F} = \nabla \bullet \bar{F} = \frac{\partial}{\partial x}(ax^3) + \frac{\partial}{\partial y}(by^2) + \frac{\partial}{\partial z}(cz^2) = 3ax^2 + 2by + 2cz$$

$$\text{grad div}\bar{F} = \nabla(\nabla \bullet \bar{F}) = \left[\frac{\partial}{\partial x}(3ax^2 + 2by + 2cz), \frac{\partial}{\partial y}(3ax^2 + 2by + 2cz), \frac{\partial}{\partial z}(3ax^2 + 2by + 2cz)\right] =$$
$$= [6ax, 2b, 2c] = 2\,[3ax, b, c]$$

Vektorfältet $\bar{F}_1 = \text{grad div } \bar{F}$ är vinkelrät mot $\bar{A}$ om skalärprodukten

$$\bar{F}_1 \bullet \bar{A} = 6abx + 2ba + 2ab = 2ab(3x + 4) = 0,$$

alltså om $x = -\frac{4}{3}$ och i denna punkt har vi $\bar{F}_1 = 2\,[-4a, b, c]$.

7. Vi deriverar första och andra ekvationen i (1) m.a.p. x och får

$$\begin{cases} u + xu_x + yv_x = 1, \\ yu_x - v - xv_x = 1, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} xu_x + yv_x = 1 - u, \\ yu_x - xv_x = 1 + v, \end{cases} \tag{6}$$

Vi löser systemet m.a.p. u_x och v_x,

$$\begin{cases} u_x = -\frac{x(1-u)-y(1+v)}{x^2+y^2}, \\ v_x = -\frac{x(1+v)-y(1-u)}{x^2+y^2}, \end{cases} \tag{7}$$

Vi deriverar nu första och andra ekvationen i (1) m.a.p. y och får

$$\begin{cases} xu_y + v + yv_y = 1, \\ u + yu_y - xv_y = -1, \end{cases} \to \begin{cases} xu_y + yv_y = 1 - v, \\ yu_y - xv_y = -1 - u, \end{cases} \tag{8}$$

Vi löser systemet m.a.p. u_y och v_y,

$$\begin{cases} u_y = -\frac{x(v-1)+y(1+u)}{x^2+y^2}, \\ v_y = \frac{x(1+u)+y(1-v)}{x^2+y^2}, \end{cases} \tag{9}$$

Lös nu ekvationssystemet

$$\begin{cases} xu + yv = x + y, \\ yu - xv = x - y, \end{cases} \tag{10}$$

för att bestämma u och v,

$$\begin{cases} u = \frac{x^2+2xy-y^2}{x^2+y^2}, \\ v = \frac{-x^2+2xy+y^2}{x^2+y^2}, \end{cases} \tag{11}$$

och få

$$\nabla u(x,y) = [u_x, u_y] = \left[-\frac{x(1-u)-y(1+v)}{x^2+y^2}, -\frac{x(v-1)+y(1+u)}{x^2+y^2}\right] =$$
$$= -\frac{1}{x^2+y^2}\left[x - y - (xu+yv), y - x + xv + yu\right].$$

I punkten $(x,y) = (1,2)$,

$$\begin{cases} u = \frac{x^2+2xy-y^2}{x^2+y^2} = \frac{1+4-4}{1+4} = \frac{1}{5}, \\ v = \frac{-x^2+2xy+y^2}{x^2+y^2} = \frac{-1+4+4}{1+4} = \frac{7}{5}, \end{cases} \tag{12}$$

$\operatorname{grad} u(1,2) = -\frac{1}{5}\left[1 - 2 - (\frac{1}{5} + 2\frac{7}{5}), 2 - 1 + \frac{7}{5} + 2\frac{1}{5}\right] = -\frac{1}{5}\left[-4, \frac{14}{5}\right]$.

8. (a) Definitionsmängden D_{uv} av $f(u,v)$ som en funktion av u, v är $\{(u,v) : v \neq 0, v \neq -1\}$. Definitionsmängden D_{xy} av

$$\tilde{f}(x,y) = f(u(x,y), v(x,y)) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{xy-1}{\sqrt{x^2+y^2}+1} - \sqrt{x^2y^2+x^2+y^2}$$

som en funktion av x, y är alla $(x,y) \neq (0,0)$.

(b)

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} f(u(x,y), v(x,y)) =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} + \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{xy-1}{\sqrt{x^2+y^2}+1} - \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \sqrt{x^2y^2+x^2+y^2} =$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}+1} - \sqrt{3}.$$

Gränsvärdet $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \tilde{f}(x,y)$ existerar och $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \tilde{f}(x,y) = 0 - 1 - 0 = -1$ ty gränsvärdet

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

existerar och blir noll eftersom

$$|xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2} \to 0 \leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2},$$

$0 \leq |f_1(x,y)| \leq \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$ och $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0.$

(c) Funktionen $\tilde{f}(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ är kontinuerlig på sin definitionsmängd $\mathrm{R}^2 \setminus (0,0)$ som en superposition, dvs att de är summor av kontinuerliga funktioner:

$$\frac{u}{v}, \frac{u-1}{v+1}, \sqrt{u^2+v^2}$$

och

$$xy, \sqrt{x^2+y^2}, \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{xy-1}{\sqrt{x^2+y^2}+1}$$