HÖGSKOLAN
I GÄVLE
ATM-Matematik
Mikael Forsberg
0734-41 23 31

För ingenjörs- och distansstudenter

FLERVARIABELANALYS
ma012b
2015 01 14

Skrivtid: 09:00-14:00. Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa. Börja varje ny uppgift på ny sida.
Använd ej baksidor. Skriv namn på varje inlämnat blad.

1. Beräkna och klassificera alla kritiska punkter till funktionen $f(x, y) = 6xy^2 - 2x^3 - 3y^4$
2. Antag att temperaturen T i en punkt (x, y, z) ges av

$$T(x, y, z) = 50 + xyz$$

   (a) Beräkna hur mycket temperaturen ändras i punkten $P = (3, 4, 1)$ när man rör sig i riktningen $v = (1, 2, 2)$.

   (b) Beräkna den maximala temperaturändringen i P och den riktning i vilken den inträffar.

3. En triangel med sidorna x, y och z har den konstanta omkretsen $x + y + z = 2s$. Arean för denna triangel ges av den s.k. Herons formel som

$$A^2 = s(s - x)(s - y)(s - z)$$

   Använd Lagranges multiplikatormetod för att visa att den liksidiga triangeln är den som ger störst area av alla trianglar med samma konstanta omkrets.
4. Visa att sfären $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ och den elliptiska konen $z^2 = a^2x^2 + b^2y^2$ är ortogonala, dvs att deras tangenplan är ortogonala i alla punkter där de två ytorna skär varandra.

5. Beräkna volymen av det kilformade område, (se figur 1) som ligger ovanför xy-planet,

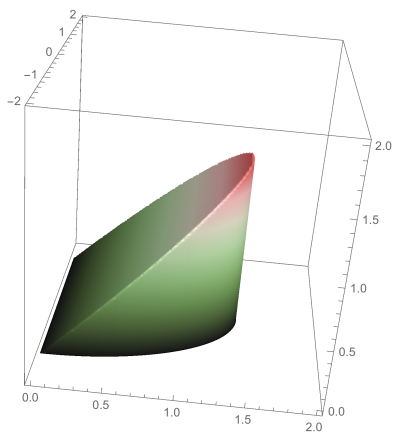

Figure 1: Figur till uppgift 5.

nedanför planet $z = y$ och inom cylindern $x^2 + y^2 = 4$.

6. Beräkna volymen av den byggnad som illustreras i figur 2.

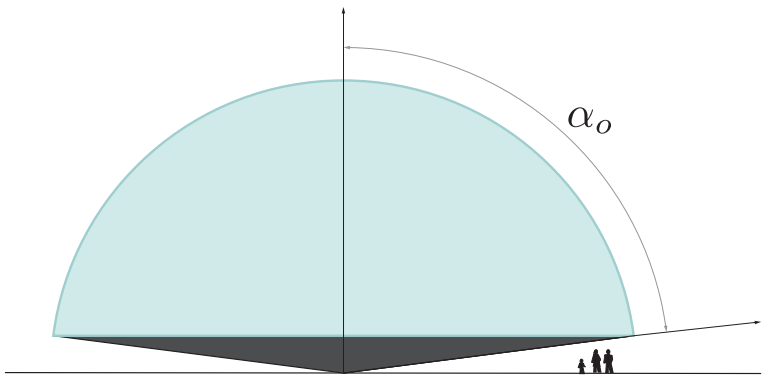

Figure 2: Strukturen i uppgift 6 är en del av en sfär med radien R och står med sin bottenspets i origo. Vinkeln α_o är, som figuren antyder, inte fullt $90°$, men är inte mer preciserad än så. Använd en trippelintegral för att beräkna volymen, så att vi ser hur volymen beror av α_o. Vad blir volymen om $\cos\alpha_o = 0.1$ och $R = 10m$?

7. Avgör om fältet

$$\mathbf{G}(x,y,z) = (xy - \sin z,\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{e^y}{z},\ \frac{e^y}{z^2} - x\cos z)$$

är konservativt i området $D = \{(x,y,z) : z \neq 0\}$. Om fältet är konservativt så ska en potential för fältet beräknas.

8. Beräkna

$$\oint_C \mathbf{F} \bullet \mathbf{dr}, \qquad \mathbf{F} = (3z, 5x, -2y),$$

där C är skärningsellipsen mellan planet $z = y + 3$ och cylindern $x^2 + y^2 = 1$.

Svar till tentamen i Flervariabelanalys, 2015 01 14.

1.

2.

3.

4.

5.

6. Volymen är

$$\frac{2\pi R^3}{3} \cdot (1 - \cos\alpha_o) = [\text{ om } \cos\alpha_o = 0.1 \text{ och } R = 10] = \frac{1.8\pi 10^3}{3} = \frac{1800\pi}{3} = 600\pi \ m^3$$

7. Fältet är konservativt med potentialfunktionen

$$\Phi(x, y, z) = \frac{x^2 y}{2} - x\sin z - \frac{e^y}{z}$$

8.

Lösningar till tentamen i Flervariabelanalys, 2015 01 14.

1. Vi ritar upp grafen till funktionen med dess kritiska punkter. Beräkna först de partiella

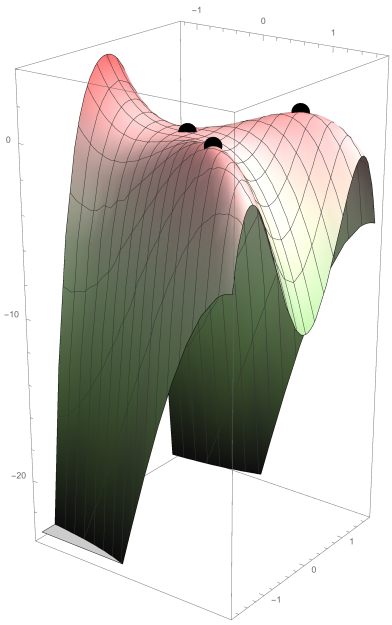

Figure 3: Grafen till funktionen $f(x,y) = 6xy^2 - 2x^3 - 3y^4$. Origo är varken max eller min: fixerar vi en riktning genom origo så får vi en terrasspunkt i riktningen. Man får alltså ingen riktning med maximum eller minimum så det är inte en riktig sadelpunkt heller. Bådea de övriga är lokala maxima.

derivatorna:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6(y^2 - x^2) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 12xy - 12y^3 = 12y(x - y^2)$$

Vi sätter dessa derivator lika med noll för att söka de kritiska punkterna. Vi får

$$x^2 = y^2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm y,$$

och

$$12y(x - y^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad \text{eller } x = y^2$$

$y = 0$ ger $x = 0$, dvs $(0, 0$ är kritisk punkt. $x = y^2$ ger att

$$y^2 = \pm y \quad \Rightarrow \quad y^2 \mp y = 0 \quad \Rightarrow \quad y(y \mp 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \text{ eller } y = \pm 1$$

Eftersom $x = y^2$ om $y \neq 0$ så gäller att $x = 1$ för båda värdena på y. Vi får alltså de kritiska punkterna

$$(1, 1) \quad \text{och} \quad (1, -1).$$

Beräknar man andra derivatorna, ställer upp hessiandeterminanten så får man att den blir noll om $(x, y) = (0, 0)$ och positiv för de övriga kritiska punkterna. I dessa övriga punkter är andra derivan map x negativ och då följer det att båda dessa kritiska punkter är lokala maxima. Se figur 3.

2. (a) En enhetsvektor i riktningen v är $e_v = \frac{1}{3}(1,2,2)$. Temperaturändringen i punkten P i den riktningen ges av riktningsderivatorn i den riktningen:

$$D_vT|_P = \nabla T|_P \bullet e_v = (yz, xz, xy)|_P \bullet e_v = (4,3,12) \bullet \frac{1}{3}(1,2,2) = \frac{34}{3}$$

(b) Maximal temperaturändringen sker i gradientens riktning och vi får att detta maximum blir längen av gradientvektorn

$$||\nabla T|_P|| = ||(4,3,12)|| = \sqrt{169} = 13$$

3. Att maximera arean är samma sak som att maximera kvadraten av arean. Vi ställer därför upp följande Lagrangefunktion:

$$L(x,y,z,\lambda) = s(s-x)(s-y)(s-z) + \lambda(x+y+z-2s)$$

Gradienten för lagrangfunktionen ska vara noll är vilkoret som måste uppfyllas. Derivering ger

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial L}{\partial x} &= -s(s-y)(s-z) + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = s(s-y)(s-z) \\
\tfrac{\partial L}{\partial y} &= -s(s-x)(s-z) + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = s(s-x)(s-z) \\
\tfrac{\partial L}{\partial z} &= -s(s-x)(s-y) + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = s(s-x)(s-y) \\
\tfrac{\partial L}{\partial \lambda} &= x+y+z-2s+\lambda = 0
\end{aligned}$$

De tre första ekvationerna ger oss att $x = y = z$ och den sista ekvationen leder till att $x = y = z = \frac{2}{3}s$. Sammantaget innebär detta att vår triangel är liksidig.

4. Vi noterar att sfären är nivåyta till funktionen $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ och konen nivåytan $G = 0$ till funktionen $G(x,y,z) = a^2x^2 + b^2y^2 - z^2$ Normalvektor till en nivåytas tangentplan ges av funktionens gradientvektor. Och två nivåytor skär varandra vinkelrät i en punkt om dessa normalvektorer är vinkelräta.
I vårt fall har vi de två normalvektorerna

$$\nabla F = (2x, 2y, 2z) \qquad \nabla G = (2a^2x, 2b^2y, -2z)$$

I en skärningspunkt mellan nivåytorna, så har vi att normalvektorernas skalärprodukt blir

$$\nabla F \bullet \nabla G = 4a^2x^2 + 4b^2y^2 - 4z^2 = 4(\underbrace{a^2x^2 + b^2y^2 - z^2}_{=G(x,y,z)=0}) = 0$$

Att vi får noll i den parantesen innan sista likheten beror på att vi befinner oss i en del av nivåytan $G = 0$.
Eftersom skalärprodukten är noll så är vektorerna ortogonala och då har vi visat att tangentplanen till ytorna är vnikelräta.

5. Basområdet i xy-planet är inom halvcirkeln $x^2 + y^2 = 4$, $y > 0$. Det finns en symmetri i kilen som gör att vi kan låta $x > 0$ och beräkna den del av kilen som ligger i första oktanten. Detta ger oss halva den volym vi söker. Vi integrerar därför över kvartscirkeln $x^2 + y^2 = 4$, $x > 0$, $y > 0$. Denna kvartscirkel är y-enkelt eftersom $0 < y < \sqrt{4 - x^2}$ för alla x i kvartscirkelskivan. För att förstå hur vi ställer upp volymsintegralen så kan vi titta i figur 4. Vid en godtycklig punkt (x, y) i halvcirkelskivan så placerar vi en infinitesimal rektangulär cylinder med basenarean $dydx$ och höjden z bestäms av ytan $z = y$ ovanför punkten. Den infinitesimala cylindern har därför volymen

$$dV = zdydx = ydydx$$

Notera att kvartscirkeln kan beskrivas som $0 < x < 2$ och $0 < y < \sqrt{4-x^2}$. Volymen för vår kil kan nu skrivas som

$$2\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} y dy dx = \int_0^2 4 - x^2 dx = \frac{16}{3}.$$

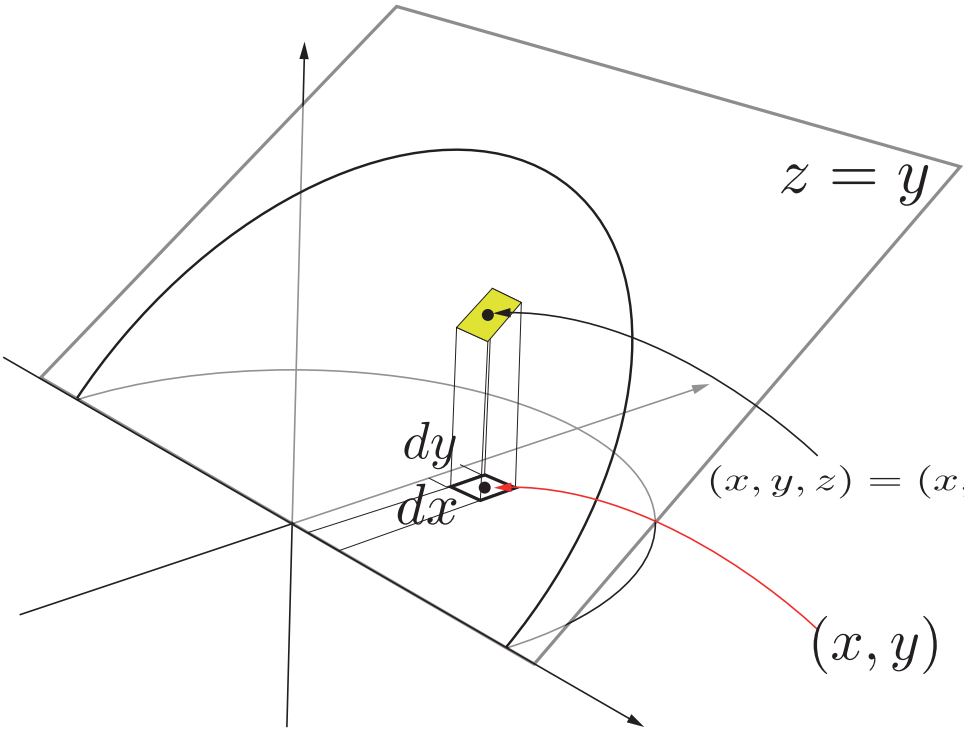

Figure 4: Bild för lösningen till uppgift 5

6. Byggnaden är sfärisk med $0 < \rho < R$, $0 < \theta < 2\pi$ och $0 < \phi < \alpha_o$. Vi får därför

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha_o} \int_0^R \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta = \frac{R^3}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha_o} \sin\phi d\phi d\theta =$$
$$= \frac{R^3}{3}(1 - \cos\alpha_0) \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi R^3(1 - \cos\alpha_o)}{3}$$

Om $R = 10$ och $\cos\alpha_o = 0.1$ så får vi att volymen blir

$$\frac{2\pi \cdot 1000 \cdot 0.9}{3} = \frac{1800\pi}{3} = 600\pi$$

7. Vi visar att fältet är konservativt genom att beräkna den potentialfunktion $\Phi(x, y, z)$ som i så fall finns. Vi har att följande måste gälla

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = xy - \sin z \tag{1}$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{x^2}{2} - \frac{e^y}{z} \tag{2}$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{e^y}{z^2} - x\cos z \tag{3}$$

Vi börjar med att integrera den första funktionen med avseende på x:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{x^2 y}{2} x \sin z + g(y, z)$$

Vi deriverar nu denna med avseende på y och utnyttjar att den ska bli lika med (2). Vi får då att

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{e^y}{z} \quad \Rightarrow \quad g(y,z) = -\frac{e^y}{z} + H(z)$$

så att vår potential nu ser ut som

$$\Phi(x,y,z) = \frac{x^2 y}{2} - x\sin z - \frac{e^y}{z} + H(z)$$

För att bestämma H så deriverar vi m.a.p. z och utnyttjar (3) och då får vi ::

$$H'(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad H = \text{konstant, t.ex. } 0$$

Vi har lyckats beräkna en potentialfunktion

$$\Phi(x,y,z) = \frac{x^2 y}{2} - x\sin z - \frac{e^y}{z}$$

och detta betyder att fältet är konservativt.

8. Idén är att använda Stokes sats:

$$\oint_C \mathbf{F} \bullet \mathbf{dr} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \mathbf{N} dS = \frac{2}{\sqrt{2}} \underbrace{\iint_S dS}_{=\sqrt{2}} = 2,$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3z & 5x & -2y \end{bmatrix} = (-2, 3, 5)$$

där S är den elliptiska skiva som C begränsar och $\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)$ är enhetsnormal för denna ellipsskiva. Arean för en ellips är produkten av ellipsens två radier multiplicerat med π. Vår ellips har radierna $r_1 = 1$ och $r_2 = \sqrt{2}$ och därför har vi

$$\iint_S dS = \text{ arean av ellisen } = r_1 \cdot r_2 \cdot \pi = \pi\sqrt{2}$$