HÖGSKOLAN I GÄVLE
ATM-Matematik
Mikael Forsberg
0734-41 23 31

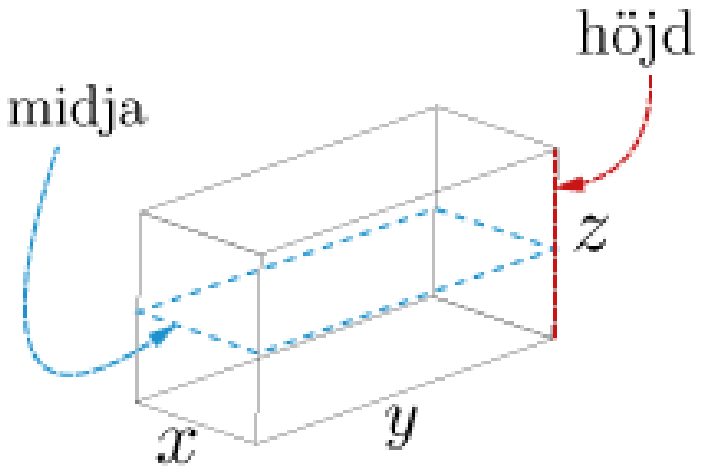
För distans och campus
FLERVARIABELANALYS
ma012b
2014 08 13

Skrivtid: 09:00-14:00. Inga hjälpmedel, förutom den bifogade formelsamlingen. Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa. Börja varje ny uppgift på ny sida.
Använd ej baksidor. Skriv namn och personnummer på varje inlämnat blad.

1. Hitta och klassificera alla kritiska punkter till funktionen $f(x, y) = x^2y(2 - x - y)$

2. Vi har funktionen $f(x, y, z) = x^2y + yz + z^2$
   (a) Beräkna riktningsderivatan för funktionen i $p = (1, -1, 1)$ i riktningen $(1, 0, 1)$.
   (b) En myra kryper på planet $x + y + z = 1$ genom punkten p. Antag att myran kryper så att f hålls konstant. I vilken riktning kryper myran då den passerar genom p?

3. Ett postföretag levererar bara paket i form av rektangulära lådor med midja och höjd uppfyller vissa villkor. Midjan är omkretsen av ett horisontellt tvärsnitt. (Se figur 1.)Vilkoret som paketet måste uppfylla är att summan av midjan och paketets höjd får vara högst 120 cm. Beräkna den största volym som en sådan låda kan ha.



Figur 1: Postföretagets rektangulära låda, definitioner.

4. Ekvationerna
$$\begin{cases} x &= u^3 - uv \\ y &= 3uv + 2v^2 \end{cases} \tag{1}$$
definierar u och v implicit som funktioner av x och y nära punkten $P = (u, v, x, y) = (-1, , 2, 1, 2)$.
Beräkna $\frac{\partial u}{\partial x}$ och $\frac{\partial u}{\partial y}$ i P.

5. Beräkna

$$\iint_D x \cos y \; dA,$$

där D är det ändliga område i första kvadranten som begränsas av koordinataxlarna och kurvan $y = 1 - x^2$

6. Beräkna arean av den del av konen $z^2 = x^2 + y^2$ som ligger inom cylindern $x^2 + y^2 = 2ay$.

7. Låt $\mathbf{F} = (z, 0, x^2)$. Beräkna flödet av detta fält genom den del av ytan $z = x^2 + y^2$ som ligger ovanför rektangeln $R = \{-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$

8. Beräkna

$$\oint_{\mathcal{C}} x^2 y \; dx - xy^2 \; dy,$$

där $\mathcal{C}$ är den medurs orienterade randen till området $0 \leq y \leq \sqrt{9 - x^2}$.

Svar till tentamen i Flervariabelanalys, 2014 08 13.

1. $(0, y)$ för alla y är en obestämbara kritiska punkter (en hel linje) $(2, 0)$ är en sadelpunkt och $(1, 1/2)$ är ett maximum.

2. (a) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

   (b) $\pm(1, 3, -4)$

3. $x = y = 20$cm, $z = 40$ cm. Volymen blir 16000 cm^3 eller 16 liter.

4. $\frac{\partial u}{\partial x} = -5$ och $\frac{\partial u}{\partial y} = 1$ i P.

5. $\frac{1-\cos 1}{2}$

6. $2\pi a^2\sqrt{2}$

7. $\frac{4}{3}$

8. $\frac{81\pi}{4}$

Lösningar till tentamen i Flervariabelanalys, 2014 08 13.

1. Vi beräknar derivatorna:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -xy(3x + 2y - 4)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x^2(x + 2y - 2)$$

Vi får att $(0, y)$ är kritisk punkt för alla värden på y. Om $y = 0$ så får vi $x = 2$ från faktorn $x + 2y - 2$ så $(2, 0)$ är kritisk punkt. För $x \neq 0 \neq y$ så gäller att båda faktorerna $3x + 2y - 4$ och $x + 2y - 2$ måste vara noll vilket leder tillpunkten $(1, 1/2)$ är en kritisk punkt.

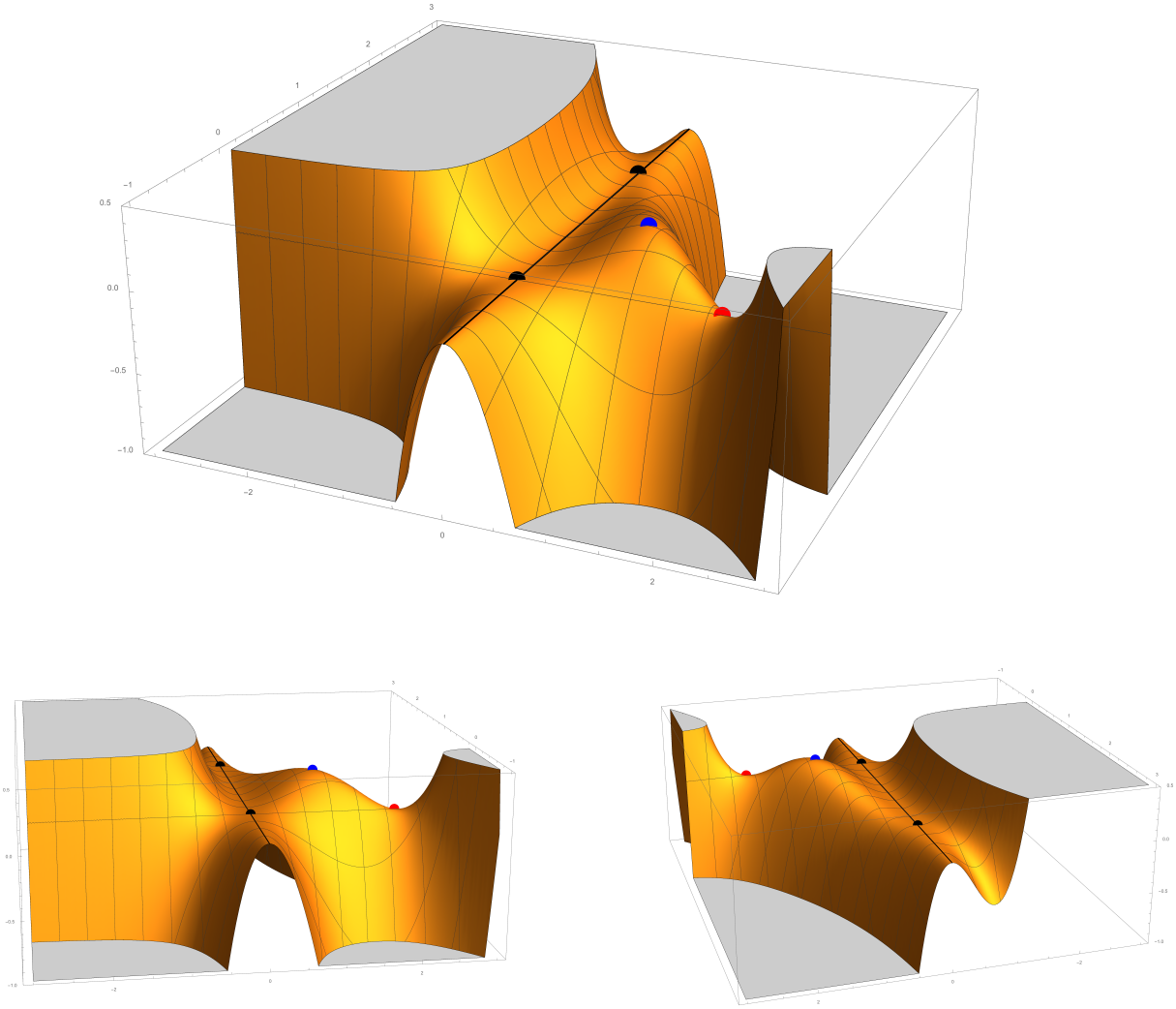
Vi klassificerar punkterna med hjälp av andraderivatatestet. Låt oss börja med att beräkna andraderivatorna

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2y(3x + y - 2)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x^2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -x(3x + 4y - 4)$$

Vi sammanställer resultatet från andraderivatatestet i följande tabell.:

kritisk punkt	spår	determinant	typ av kritisk punkt
$(0, y)$	$4y - 2y^2$	0	degenererad
$(2, 0)$	0	-16	sadel
$(1, 1/2)$	-3/2	2	max

Tabell 1: Resultatet från andraderivatatestet.
Situationen kan ses i figur 2



Figur 2: *Grafen till funktionen* $f(x, y) = x^2y(2 - x - y)$,

Kritiska punkterna $(0, y)$ *ligger på den svarta linjen och vi har att funktionen är konstant på denna linje. Detta gör att vi på den svarta linjen inte har strikta max, min eller sadelpunkter.*
Tittar man noggrant så ser vi att för varje fixt y *så är andra derivatan map* x *lika med* $2y(2-y)$ *och denna derivata är positiv om* $0 < y < 2$ *och negativ om* $y < 0$ *eller om* $y > 2$. *För varje fixt* y *så ger andraderivatatestet i en variabel så ger detta att vi har minimum där derivatan är positiv och max där derivatan är negativ. Men max och min i detta fall är inte helt strikt eftersom funktionen är konstant längs linjen* $(0, y)$. *Det är detta som degenererad betyder i detta fall.*
Kritiska punkterna är minima mellan de två svarta punkterna. Utanför har vi maxima.
I de svarta gränspunkterna $(0, 0)$ *och* $(0, 2)$ *har vi sadelstruktur eftersom funktionens värden ökar i vissa riktningar och avtar i andra.*
Den röda punkten är $(2, 0, 0)$ *(sadel) och den blå är* $(1, 1/2, 1/4)$ *(max).*

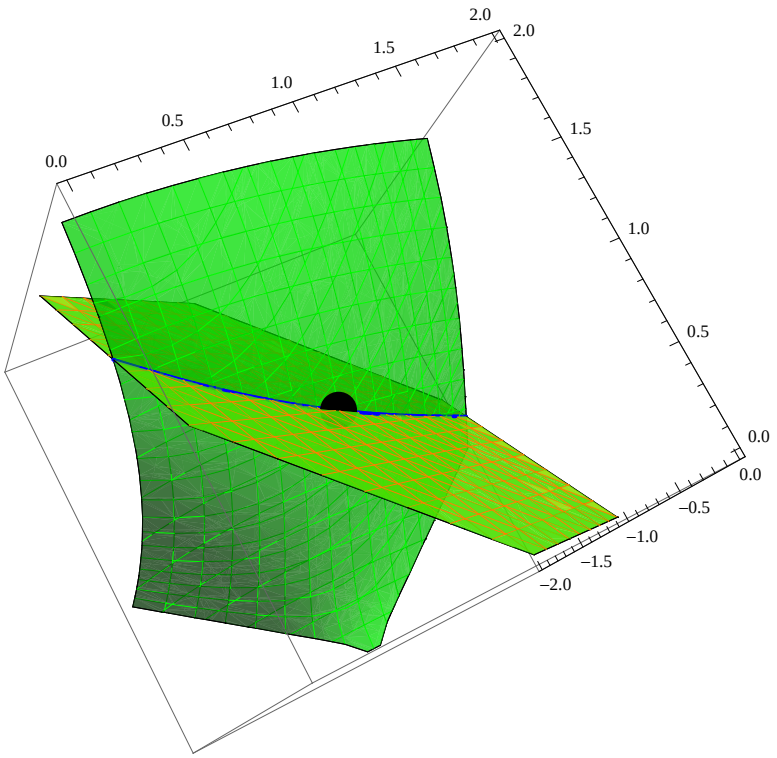
2. (a) Gradienten till f:

$$\nabla f = (2xy, x^2 + z, y + 2z) \quad \text{i } p = (1, -1, 1) :: \quad \nabla f|_p = (-2, 2, 1)$$

Riktningsderivatan $D_u f$ i riktningen $u = (1, 0, 1)$ är skalärprodukten mellan ovan beräknade gradient och **en enhetsvektor** i riktningen u:

$$D_u f = \nabla f|_p \bullet \frac{u}{||u||} = \frac{(-2, 2, 1) \bullet (1, 0, 1)}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(b) Om myran kryper på planet på sådant sätt att f är konstant så betyder det att myran kryper längs skärningslinjen (se fig 3) mellan planet och den aktuella nivåytan.



Figur 3: Figur som visar nivåytan $f = -1$ och $x + y + z = 1$ och dess skärningslinje och punkten $p = (1, -1, 1)$

Riktningen kommer därför vara vinkelrät mot både planets normalvektor $n = (1, 1, 1)$ och mot gradienten till funktionen i punkten p. Riktningen kan därför beräknas som kryssprodukten $\nabla f|_p \times n$:

$$\nabla f|_p \times n = (-2, 2, 1) \times (1, 1, 1) = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = (1, 3, -4)$$

Myran kryper alltså längs den linje som denna vektor spänner upp men vi vet inte om den kryper i positiv eller negativ riktning map vektorn så därför blir svaret att myran kryper i riktninen $\pm(1, 3, -4)$.

3. Vi har den rektangulära lådans sidor givna som x, y och z. Vår uppgift är att maximera volymen $V(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$ under bivillkoret att

$$\underbrace{2x + 2y}_{= \text{ midjan}} + z = 120$$

Vi ställer därför upp Lagrangefunktionen:

$$L(x, y, z, \lambda) = xyz - \lambda(2x + 2y + z - 120).$$

Nu söker vi kritiska punkter till Lagrangfunktionen, vilket kräver att vi hittar värden på variablerna som gör att Lagrangefunktionens partialderivator blir noll:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= yz - 2\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\lambda = yz \\
\frac{\partial L}{\partial y} &= xz - 2\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\lambda = xz \\
\frac{\partial L}{\partial z} &= xy - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\lambda = 2xy \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= -2x - 2y - z + 120 = 0
\end{aligned}$$

De tre första ekvationerna av detta system ger att $z = 2x = 2y$ som insatt i bivillkorekvationen (den fjärde partialderivatan till Lagrange) blir $3z = 120$. Vi får att $x = 20$, $y = 20$ och $z = 40$ och den maximala volymen blir således

$$V = 20 \cdot 20 \cdot 40 = 16\ 000\ cm^3$$

Uttrycker man sidorna i dm så har vi volymen

$$2 \cdot 2 \cdot 4 = 16\ dm^3 = 16 \text{ liter}$$

4. Ekvationerna definerar en funktion

$$F(u, v) = (F_1(u, v), F_2(u, v) = (\underbrace{u^3 - uv}_{=x}, \underbrace{3uv + 2v^2}_{=y})$$

som tar oss från ett u, v rum till ett x, y rum. Uppgiften söker partialderivatorna till den inversa funktionen $(u, v) = F^{-1}(x, y)$ som överför från x, y rummet till u, v rummet.

Det är troligen svårt att beräkna denna inversa funktion explicit men vi kan utnyttja att i en viss punkt så är derivatamatrisen till den inversa funktionen inversen till derivatamatrisen till F.

Vi har

$$F'|_P = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{bmatrix}_P = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}_P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Inversen till denna matris blir

$$\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$$

Och detta är nu derivatamatrisen till F^{-1} i punkten P. Det följer nu att första raden är partialderivatorna $\frac{\partial u}{\partial x}$ och $\frac{\partial u}{\partial y}$ i P, som vi sökte.

Alternativ lösningsidé:

Man kan derivera ekvationerna (1) implicit med avseende på x och y och man får i så fall 4 stycken ekvationer i de obekanta partialderivatorna. Allting uträknat i punkten P ger oss systemet

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Som ger oss lösningen

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ \\ 1 \\ \\ 6 \\ \\ -1 \end{bmatrix}$$

5. Integrationsområdet kan skrivas som

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$$

varför vår integral kan skrivas

$$\int_0^1 \int_0^{1-x^2} x \cos y dy dx = \int_0^1 x \sin(1 - x^2) dx$$

Gör substitutionen

$$u = 1 - x^2, \quad du = -2x dx \to dx = -\frac{1}{2} du, \quad x = 1 \to u = 0, \quad x = 0 \to u = 1$$

som gör att vår integral blir

$$-\frac{1}{2} \int_1^0 \sin u du = \frac{1}{2} \int_0^1 \sin u du = \left[-\frac{1}{2} \cos u \right]_0^1 = \frac{1}{2}(-\cos 1 - (-\cos 0)) = \frac{1 - \cos 1}{2}$$

6. För positiva z så kan vi beskriva konen som grafen till funktionen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ som har parametriseringen

KOM IHÅG ATT VI OCKSÅ HAR EN DEL AV KONEN DÅ $z < 0$

$$r(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$$

Dess partialderivator:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = (1, 0, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}), \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = (0, 1, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}})$$

Partialderivatornas kryssprodukt (som behövs för att beräkna ytans areaelement):

$$\frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} = (-, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}), -, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}), 1)$$

Areaelementet blir

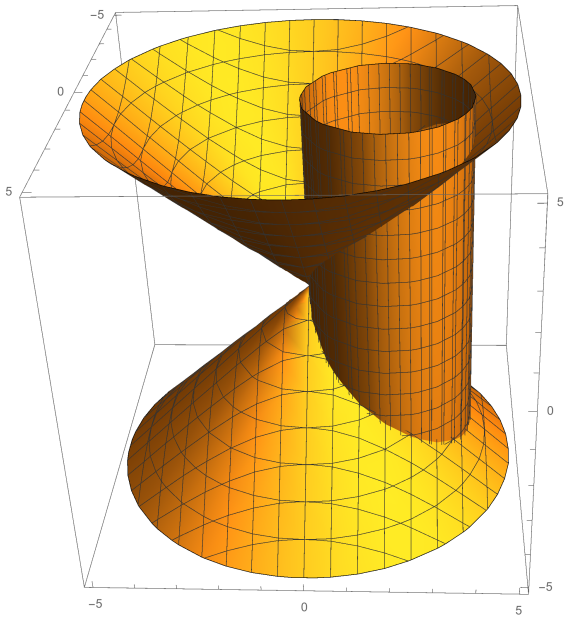
$$dS = \underbrace{\left\| \frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} \right\|}_{=\sqrt{2}} dxdy = \sqrt{2}\ dxdy = \sqrt{2} r\ drd\theta$$

Nu behöver vi beskriva cirkelområdet som vår kondel ska ligga ovanför. Detta är cirkeln

$$x^2 + y^2 = 2ay \quad \text{i polära koordinater} \quad r^2 = 2ar \sin\theta \quad \Rightarrow \quad r = 2a \sin\theta$$

, som man kan noterar (via kvadratkomplettering) kan skrivas som $x^2 + (y - a)^2 = a^2$ som är en cirkel med radie a centrerad i $(0, a)$. I polära koordinater så beskrivs denna cirkelskiva som

$$\{0 \leq r \leq 2a \sin\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi\}$$



Figur 4: Observera att konen har två delar. Konen har alltså två delar som ligger inom cylindern!

Vår area för den positiva konen blir

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2a^2\sin\theta}\sqrt{2}\ r\ drd\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\pi}[r^2]_0^{2a\sin\theta}d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\pi}4a^2\sin^2\theta d\theta =$$

$$= \frac{4a^2\sqrt{2}}{2}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta = a^2\sqrt{2}\left[\theta - \underbrace{\frac{\sin 2\theta}{2}}_{=0\ \text{ i } 0 \text{ och } \pi}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \pi a^2\sqrt{2}$$

Detta är arean av den övre kon-delen. Kom ihåg att konen har två delar (se figur 4), en för positiva z och en för negativa. Den nedre är precis lika stor, tack vare symmetri, och den totala arean för konen inom cylindern blir alltså $2\pi a^2\sqrt{2}$.

7. Se föreläsning 14 slide nummer 8.

8. Använd Greens sats. Vi har fältet $F = (x^2y, xy^2)$ och Greens sats ger oss direkt

$$\oint_C x^2y\ dx - xy^2\ dy = \oint_C F_1\ dx + F_2\ dy =$$

[Använd Greens sats]

$$= -\int_D\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dA = \int_D y^2 + (x^2)dxdy = \int_D x^2 + y^2dxdy,$$

där minustecknet efter tredje likheten kommer från att vi har en medursorientering. Kom ihåg att positiv orientering alltid är moturs. Området D (som ju är en halvcirkel) kan enklast beskrivas mha polära koordinater som $\{0 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta \leq \pi\}$ och efter ett byte till polära koordinater så blir vår integral

$$\int_0^{\pi} \int_0^3 r^3 dr d\theta = \frac{81\pi}{4}$$