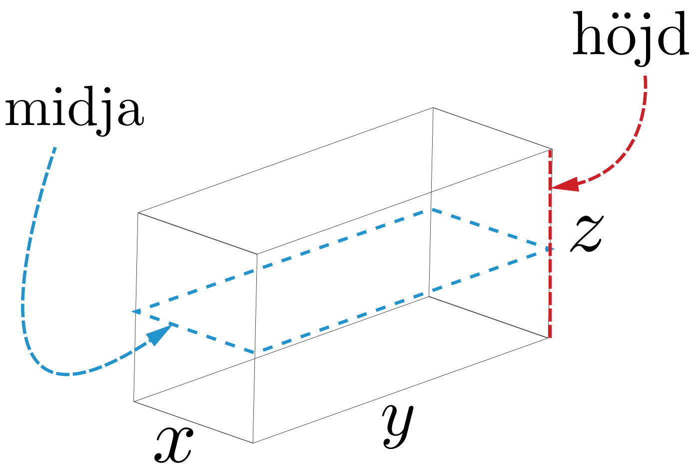
HÖGSKOLAN I GÄVLE
ATM-Matematik

Flervariabelanalys
ma012b
2014 08 13

1. Ett postföretag levererar bara paket i form av rektangulära lådor med midja och höjd uppfyller vissa villkor. Midjan är omkretsen av ett horisontellt tvärsnitt. (Se figur 1.)Vilkoret som paketet måste uppfylla är att summan av midjan och paketets höjd får vara högst 120 cm. Beräkna den största volym som en sådan låda kan ha.



Figur 1: Postföretagets rektangulära låda, definitioner.

Svar till tentamen i Flervariabelanalys, 2014 08 13.

1. $x = y = 20$cm, $z = 40$ cm. Volymen blir 16000 cm^3 eller 16 liter.

Lösningar till tentamen i Flervariabelanalys, 2014 08 13.

1. Vi har den rektangulära lådans sidor givna som x, y och z. Vår uppgift är att maximera volymen $V(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$ under bivillkoret att

$$\underbrace{2x + 2y}_{=\text{ midjan}} + z = 120$$

Vi ställer därför upp Lagrangefunktionen:

$$L(x, y, z, \lambda) = xyz - \lambda(2x + 2y + z - 120).$$

Nu söker vi kritiska punkter till Lagrangfunktionen, vilket kräver att vi hittar värden på variablerna som gör att Lagrangefunktionens partialderivator blir noll:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= yz - 2\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\lambda = yz \\
\frac{\partial L}{\partial y} &= xz - 2\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\lambda = xz \\
\frac{\partial L}{\partial z} &= xy - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\lambda = 2xy \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= -2x - 2y - z + 120 = 0
\end{aligned}$$

De tre första ekvationerna av detta system ger att $z = 2x = 2y$ som insatt i bivillkorekvationen (den fjärde partialderivatan till Lagrange) blir $3z = 120$. Vi får att $x = 20$, $y = 20$ och $z = 40$ och den maximala volymen blir således

$$V = 20 \cdot 20 \cdot 40 = 16\ 000\ cm^3$$

Uttrycker man sidorna i dm så har vi volymen

$$2 \cdot 2 \cdot 4 = 16\ dm^3 = 16 \text{ liter}$$