HÖGSKOLAN
I GÄVLE
ATM-Matematik
Mikael Forsberg
0734-41 23 31

För distans och campus

FLERVARIABELANALYS
ma012b
2014 08 13

Skrivtid: 09:00-14:00. Inga hjälpmedel, förutom den bifogade formelsamlingen. Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa. Börja varje ny uppgift på ny sida.
Använd ej baksidor. Skriv namn och personnummer på varje inlämnat blad.

1. Hitta och klassificera alla kritiska punkter till funktionen $f(x, y) = x^2y(2 - x - y)$

Svar till tentamen i Flervariabelanalys, 2014 08 13.

1. Om $x = 0$ så har vi, för alla y, en obestämbar (degenererad) kritiska punkt (en hel linje). Dessa är maxima om $y < 0$ och om $y > 2$. Minima om $0 < y < 2$ och sadelpunkter om $y = 0$noch om $y = 2$. $(2, 0)$ är en sadelpunkt och $(1, 1/2)$ är ett maximum.

Lösningar till tentamen i Flervariabelanalys, 2014 08 13.

1. Vi beräknar derivatorna:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -xy(3x + 2y - 4)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x^2(x + 2y - 2)$$

Vi får att $(0, y)$ är kritisk punkt för alla värden på y. Om $y = 0$ så får vi $x = 2$ från faktorn $x + 2y - 2$ så $(2, 0)$ är kritisk punkt. För $x \neq 0 \neq y$ så gäller att båda faktorerna $3x + 2y - 4$ och $x + 2y - 2$ måste vara noll vilket leder tillpunkten $(1, 1/2)$ är en kritisk punkt.

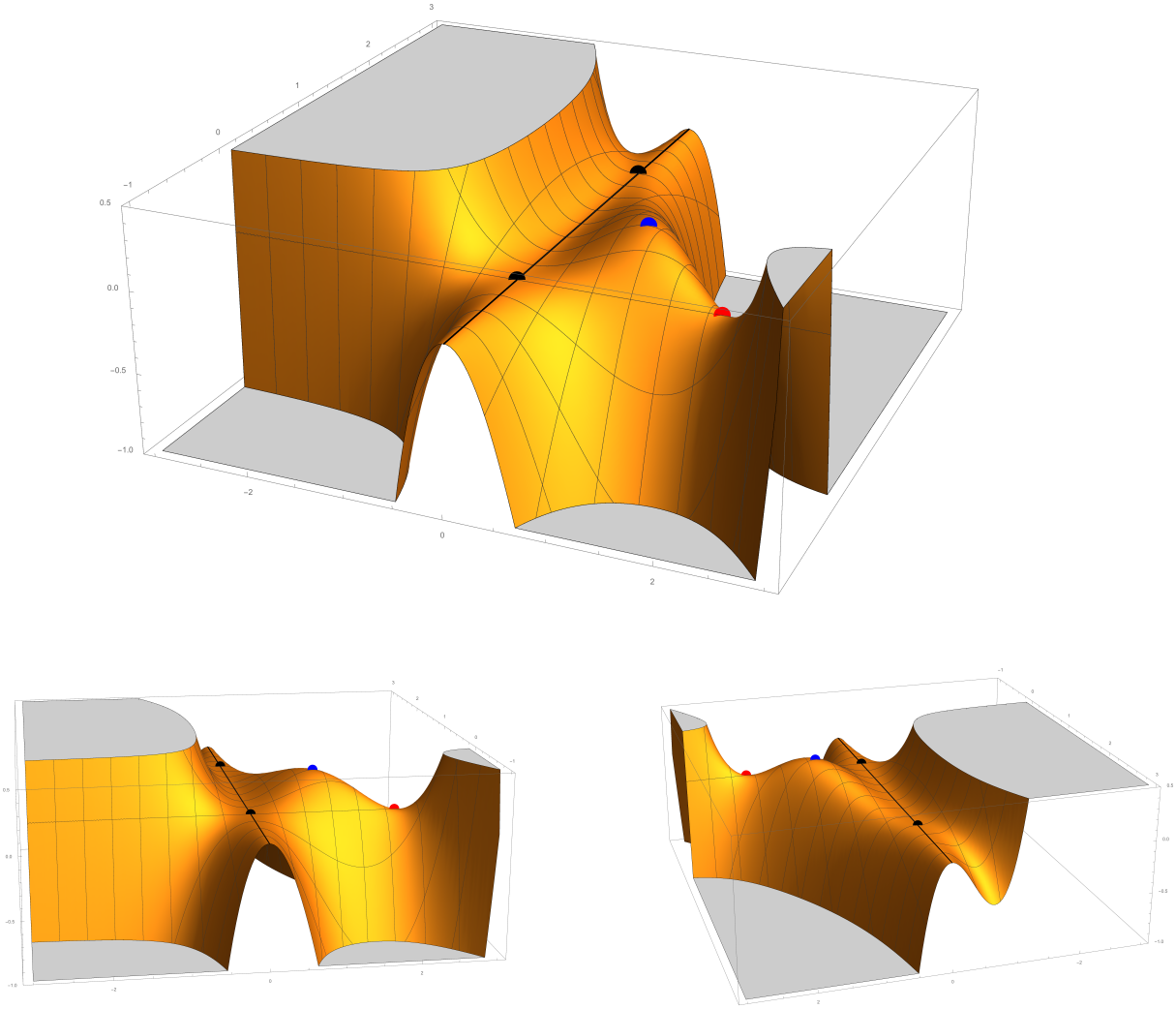
Vi klassificerar punkterna med hjälp av andraderivatatestet. Låt oss börja med att beräkna andraderivatorna

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2y(3x + y - 2)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x^2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -x(3x + 4y - 4)$$

Vi sammanställer resultatet från andraderivatatestet i följande tabell.:

kritisk punkt	spår	determinant	typ av kritisk punkt
$(0, y)$	$4y - 2y^2$	0	degenererad
$(2, 0)$	0	-16	sadel
$(1, 1/2)$	-3/2	2	max

Tabell 1: Resultatet från andraderivatatestet.
Situationen kan ses i figur 1



Figur 1: *Grafen till funktionen* $f(x, y) = x^2y(2 - x - y)$,

Kritiska punkterna $(0, y)$ *ligger på den svarta linjen och vi har att funktionen är konstant på denna linje. Detta gör att vi på den svarta linjen inte har strikta max, min eller sadelpunkter.*
Tittar man noggrant så ser vi att för varje fixt y *så är andra derivatan map* x *lika med* $2y(2-y)$ *och denna derivata är positiv om* $0 < y < 2$ *och negativ om* $y < 0$ *eller om* $y > 2$. *För varje fixt* y *så ger andraderivatatestet i en variabel så ger detta att vi har minimum där derivatan är positiv och max där derivatan är negativ. Men max och min i detta fall är inte helt strikt eftersom funktionen är konstant längs linjen* $(0, y)$. *Det är detta som degenererad betyder i detta fall.*
Kritiska punkterna är minima mellan de två svarta punkterna. Utanför har vi maxima.
I de svarta gränspunkterna $(0, 0)$ *och* $(0, 2)$ *har vi sadelstruktur eftersom funktionens värden ökar i vissa riktningar och avtar i andra.*
Den röda punkten är $(2, 0, 0)$ *(sadel) och den blå är* $(1, 1/2, 1/4)$ *(max).*