HÖGSKOLAN
I GÄVLE
ATM-Matematik
Mikael Forsberg
0734-41 23 31

För distans och campus
FLERVARIABELANALYS
ma012b
2014 0610

Skrivtid: 09:00-14:00. Inga hjälpmedel, förutom den bifogade formelsamlingen. Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa. Börja varje ny uppgift på ny sida.
Använd ej baksidor. Skriv namn på varje inlämnat blad.

1. Genom att välja värde på talet d så har planet $3x - 2y + 5z = d$ chansen att vara ett tangentplan till enhetssfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Bestäm de punkter på sfären där planet kan tangera och de värden på d som då krävs.

2. Avgör om x och z är implicit definierade som funktion av y via följande ekvationssystem

$$\begin{aligned} x^3 + xy + y^2 + z^2 &= 0 \\ x + x^3y + xy^3 + xz^3 &= 0 \end{aligned}$$

   i punkterna $p = (1, -3, 0)$ och $q = (2, -1, 1)$

3. Beräkna och klassificera alla kritiska punkter till funktionen

$$f(x, y) = 9x^2 + xy + 35x + 4y^2 - 6y + 38.$$

4. En rektangulär låda ska byggas där man utnyttjar befintlig vägg och golv som två av lådans sidor. Övriga 4 sidor skall byggas med K kvadratmeter material. Hur stor volym kan lådan högst innesluta. Se även figur 1:

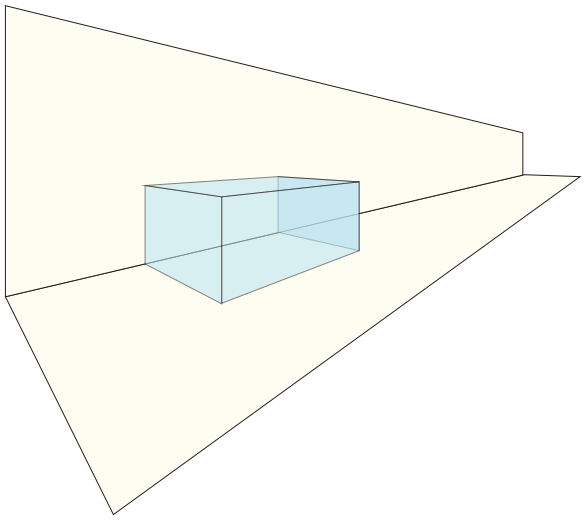

Figure 1: Lådan har marken som botten och väggen som bakre sida.

5. Låt området Ω vara det begränsade område som begränsas av de fyra linjerna $x + 3y = 1$, $x + 3y = 3$, $3x + 2y = -1$ och $3x + 2y = 2$. Använd en dubbelintegral för att beräkna arean av området. Om Du kan så använd gärna Linjär algebra för att checka ditt svar, men uppgiften går ut på att räkna ut arean med hjälp av en dubbelintegral, och det är detta som kommer att bedömas.

6. En parfymflaska har designats i form av två "apelsinklyftor" sammanfogade med en timglasform. Designparametrar är angivna i figur 2. Beräkna volymen för de båda apelsinklyftorna.

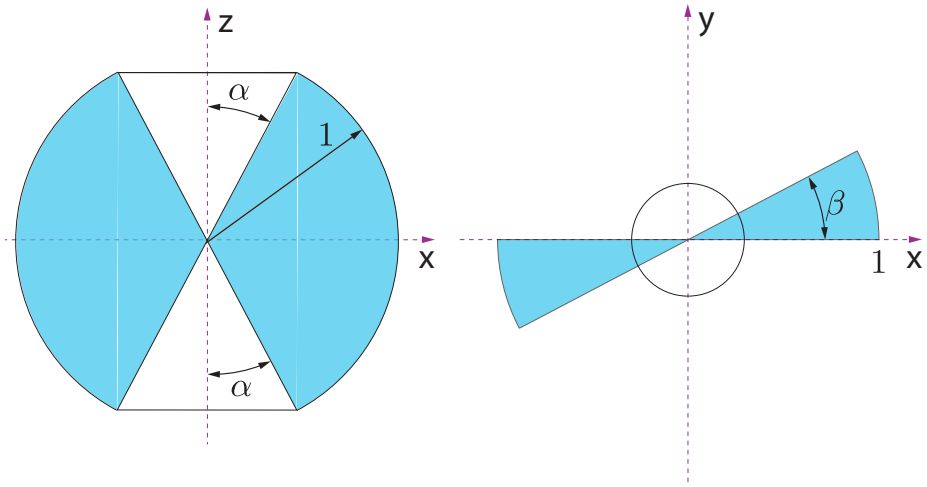

Figure 2: *Vinklarna $\alpha = \pi/6$ och $\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$. I vänstra figuren ser vi flaskan i en vy från negativa delen av y-axeln. Den högra figuren är en vy rakt uppifrån.*

7. Planet $y + z = 1$ delar sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ i en större och en mindre del. Beräkna arbetet som utförs när man rör sig ett varv runt skärningscirkeln mellan planet och sfären, dvs beräkna
$$\oint_C F \bullet dr,$$
där $F = (y, 2x, -x)$

8. Beräkna flödet av fältet
$$F = (x + e^{-yz}, y + \ln(xz)\ ,\ \ln(xy)\ )$$
genom randytan ∂T till tetraedern T som begränsas av koordinatplanen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ och planet $\frac{x}{3} + y + z = 1$.

Svar till tentamen i Flervariabelanalys, 2014 0610.

1. Tangeringspunkter är $\pm\frac{1}{\sqrt{38}}(3,-2,5)$ och $d=\pm\sqrt{38}$

2. z kan inte skrivas som funktion av y i punkten p men x och z kan båda skrivas som funktion av y i punkten q.

3. Enda kritiska punkten $(-2,1)$ är ett minimum.

4. Maximala volymen blir $2\left(\frac{K}{6}\right)^{3/2}$

5. Arean blir $\frac{6}{7}$.

6. $2/3$.

7. π

8. Flödet är 1

Lösningar till tentamen i Flervariabelanalys, 2014 0610.

1. Sfären kan skrivas som nivåytan $\mathbf{F} = 0$ för funktionen $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ vilket ger att ett tangenplan i en punkt på sfären har denna funktions gradient som normalvektor i punkten. Gradienten blir

$$\nabla F = (2x, 2y, 2z)$$

För att vårt plan ska tangera sfären så måste planets normalvektor $\mathbf{n} = (3, -2, 5)$ vara parallell med gradienten i tangeringspunkten. Detta ger oss villkoret

$$\nabla \mathbf{F} = k \cdot \mathbf{n} \quad \Rightarrow \quad (2x, 2y, 2z) = k \cdot \mathbf{n} \quad \Rightarrow \quad (x, y, z) = \frac{k}{2} \cdot \mathbf{n} = \frac{k}{2} \cdot (3, -2, 5)$$

(x, y, z) ska ligga på sfären och vi får då att

$$\left(\frac{k}{2}\right)^2 \cdot \underbrace{(3^2 + (-2)^2 + 5^2)}_{=||\mathbf{n}||^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad k = \pm\frac{2}{||\mathbf{n}||} = \pm\frac{2}{\sqrt{38}}$$

Punkterna där planet kan tangera blir nu

$$(x, y, z) = \frac{k}{2} \cdot \mathbf{n} = \pm\frac{\mathbf{n}}{||\mathbf{n}||} = \pm\frac{1}{\sqrt{38}}(3, -2, 5)$$

Genom att sätta in dessa punkter i planets ekvation så kan vi beräkna d:

$$d = 3x - 2y + 5z = \mathbf{n} \bullet (x, y, z) = \mathbf{n} \bullet \pm\frac{\mathbf{n}}{||\mathbf{n}||} = \pm\frac{||\mathbf{n}||^2}{||\mathbf{n}||} = \pm||\mathbf{n}|| = \pm\sqrt{38}$$

Kom ihåg :: $\mathbf{n} \bullet \mathbf{n} = ||\mathbf{n}||^2$

2. Linjärisering av ekvationssystemet i en punkt $p = (a, b, c)$ ger

$$\begin{aligned} (3x^2 + y)|_p(x - a) + (x + 2y)|_p(y - b + (2z)|_p(z - c) &= 0 \\ (1 + 3x^2 + y^3 + z^3)|_p(x - a) + (x + x^3)|_p(y - b + (3xz^2)|_p(z - c) &= 0, \end{aligned}$$

som i våra punkter ger oss systemen:

I punkten $p = (1, -3, 0)$ får vi systemet

$$\begin{aligned} -5y &= 15 \\ -35x + 2y &= -29 \end{aligned}$$

som på matris form blir

Glöm inte z-variabeln ...

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -5 & 0 & -15 \\ -35 & 2 & 0 & -29 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -35 & 2 & 0 & -29 \\ 0 & -5 & 0 & -15 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{29}{5} \end{array}\right]$$

Från detta ser vi att vi kan lösa ut x och y som blir konstanta funktioner med avseende på z. z kan inte skrivas som funktion av y

I punkten $q = (2, -1, 1)$ får vi systemet

$$\begin{aligned} 11x + 2z &= 24 \\ -11x + 10y + 6z &= 22 \end{aligned}$$

som på matris form blir

Glöm inte z-variabeln ...

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 11 & 0 & 2 & 24 \\ -11 & 10 & 6 & 22 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{11} & \frac{24}{11} \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & \frac{23}{5} \end{array}\right]$$

Från detta ser vi att vi kan lösa ut x och y som blir funktioner med avseende på den fria variabeln z. Ett byte av kolonnerna två och tre visar att y kan vara fri variabel för systemet och att x och z kan uttryckas som funktioner av y. Implicita funktionssatsen ger nu att samma sak är sant för det ickelinjära systemet.

3. Beräkna gradienten

$$\nabla f = (18x + y + 35, x + 8y - 6)$$

I en kritisk punkt ska gradienten vara noll vilket ger följande linjära ekvationssystem

$$\begin{aligned} x + 8y &= 6 \\ 18x + y &= -35 \end{aligned}$$

Systemets matrisform blir, som vi radreducerar och får:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 8 & 6 \\ 18 & 1 & -35 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

vilket alltså leder till att vi funnit den kritiska punkten $(x, y) = (-2, 1)$.

Nu behöver vi klassificera punkten, vilket vi gör genom att beräkna funktionens hessianmatris i punkten. Denna blir

$$H = \begin{bmatrix} 18 & 1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Eftersom determinanten blir $\det H = 143 > 0$ och spåret blir $26 > 0$ så har vi att vår kritiska punkt blir ett minimum, något som figur 3 också verifierar:

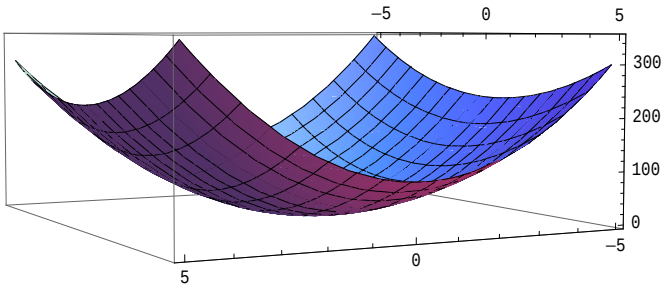

Figure 3: *Grafen till funktionen $f(x, y) = 9x^2 + xy + 35x + 4y^2 - 6y + 38$ ser ju ut att ha ett uppenbart minimum.*

4. Vi inför koordinater för lådan enligt figur 4 Volymen för lådan blir då $V(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$. Aren för lådans sidor blir $A(x, y, z) = 2xz + xy + yz$ så vårt problem blir att

$$\text{Maximera} \quad x \cdot y \cdot z \quad \text{under bivillkoret} \quad 2xz + xy + yz = K$$

Lagrangefunktionen för detta problem blir

$$L(x, y, z, \lambda) = xyz - \lambda(2xz + xy + yz - K)$$

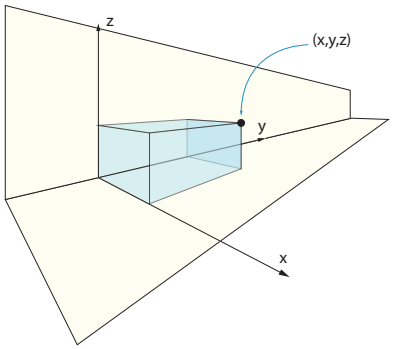

Figure 4: Definition av lådans koordinater

I en kritisk punkt för vårt problem så ska partialderivatorna vara noll:

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{\partial L}{\partial x} &= yz - (2z+y)\lambda \quad \Rightarrow \quad \frac{xyz}{\lambda} = 2xz + xy && (1)\\
0 = \frac{\partial L}{\partial y} &= xz - (x+z)\lambda \quad \Rightarrow \quad \frac{xyz}{\lambda} = xy + yz && (2)\\
0 = \frac{\partial L}{\partial z} &= xy - (2x+y)\lambda \quad \Rightarrow \quad \frac{xyz}{\lambda} = 2xz + yz && (3)\\
0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 2xz + xy + yz - K && (4)
\end{aligned}
$$

Vi har nu att (1) och (2) ger att $y = 2x$ och att (1) och (3) ger att $x = z$ och att (2) och (3) ger att $y = 2z$.

Sätter vi nu in att $y = 2x$ och $z = x$ i (4) så får vi att

$$2x^2 + 2x^2 + 2x^2 = K \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{K}{6} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{K}{6}},$$

eftersom vi bara söker positiva lösningar.

Detta ger oss att de övriga sidorna blir $y = 2\sqrt{\frac{K}{6}}$ och $z = \sqrt{\frac{K}{6}}$ och den maximala volymen blir alltså

$$V = \sqrt{\frac{K}{6}} \cdot 2\sqrt{\frac{K}{6}} \cdot \sqrt{\frac{K}{6}} = 2\frac{K}{6}\sqrt{\frac{K}{6}} = 2\left(\frac{K}{6}\right)^{3/2}$$

5. Vi ritar upp integrationsområdet i figur 5

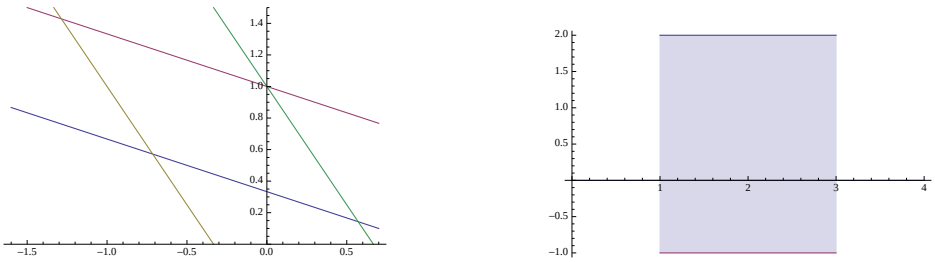

Figure 5: *Figur till uppgift 5. Integrationsområdet i xy koordinater är begränst av de fyra linjerna i vänstra figuren. Den högra figuren visar området när vi bytt till uv-koordinater.*

Uppgiften förenklas mycket om vi gör variabelbytet

$$
\begin{aligned}
u &= x + 3y\\
v &= 3x + 2y
\end{aligned}
$$

ty då kan integrationsområdet skrivas som $\{1 \leq u \leq 3, -1 \leq v \leq 2\}$. Vi måste dock lösa ut och uttrycka x och y som funktioner av u och v. Detta ger att

$$x = \frac{1}{7} - 2u + 3v \tag{5}$$

$$y = \frac{1}{7} 3u - v \tag{6}$$

Som matrisekvation blir detta system

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

och determinanten för matrisen till höger kommer att behövas vid variabelbytet i integralen:

$$\det \underbrace{\frac{1}{7} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}}_{=J} = \det J = -\frac{1}{7}$$

Vår integral blir nu

$$\iint_{\Omega} dA = \int_{-1}^{2} \int_{1}^{3} |\det J| du dv = \frac{1}{7} \int_{-1}^{2} \int_{1}^{3} du dv = \frac{6}{7}$$

6. I sfäriska koordinater så kan en av klyftorna beskrivas som

$$\Omega = \{0 \leq r \leq 1, \pi/6 \leq \phi \leq 5\pi/6, 0 \leq \theta \leq 1/\sqrt{3}\}$$

Volymen ges då som integralen

$$\iiint_{\Omega} dV = \int_{0}^{1/\sqrt{3}} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \int_{0}^{1} r^2 \sin\phi dr d\phi d\theta = \cdots = \frac{1}{3}$$

och så har flaskan två delar och den totala volymen blir därför 2/3.

7. Idén är att använda Stokes sats för att överföra linjeintegralen till en integral över skärningscirkelskivan. Se figur 6 för vissa detaljer.

$$\oint_C F \bullet dr = [\text{ Stokes sats }] = \iint_{\substack{\text{cirkel-}\\\text{skivan}}} \underbrace{\nabla \times F}_{=(0,1,1)} \bullet \underbrace{\mathbf{N}\, dS}_{=(0,1,1)dxdy} =$$

NOTERA ::
$\mathbf{N} = \mathbf{n}/||\mathbf{n}||$
$dS = ||\mathbf{n}||dxdy$

$$= [\text{ cirkelskivans normal är } (0,1,1) \text{ eftersom den är en del av planet } y + z = 1] =$$

$$= 2 \iint_{\substack{\text{cirkel-}\\\text{skivan}}} dxdy = 2 \cdot \text{ cirkelns area } = 2 \cdot \pi \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = \pi$$

8. Genom att använda divergenssatsen så ges flödet

$$I = \iint_{\partial T} F \bullet \overline{dS} = \iiint_{T} \nabla \bullet F dV$$

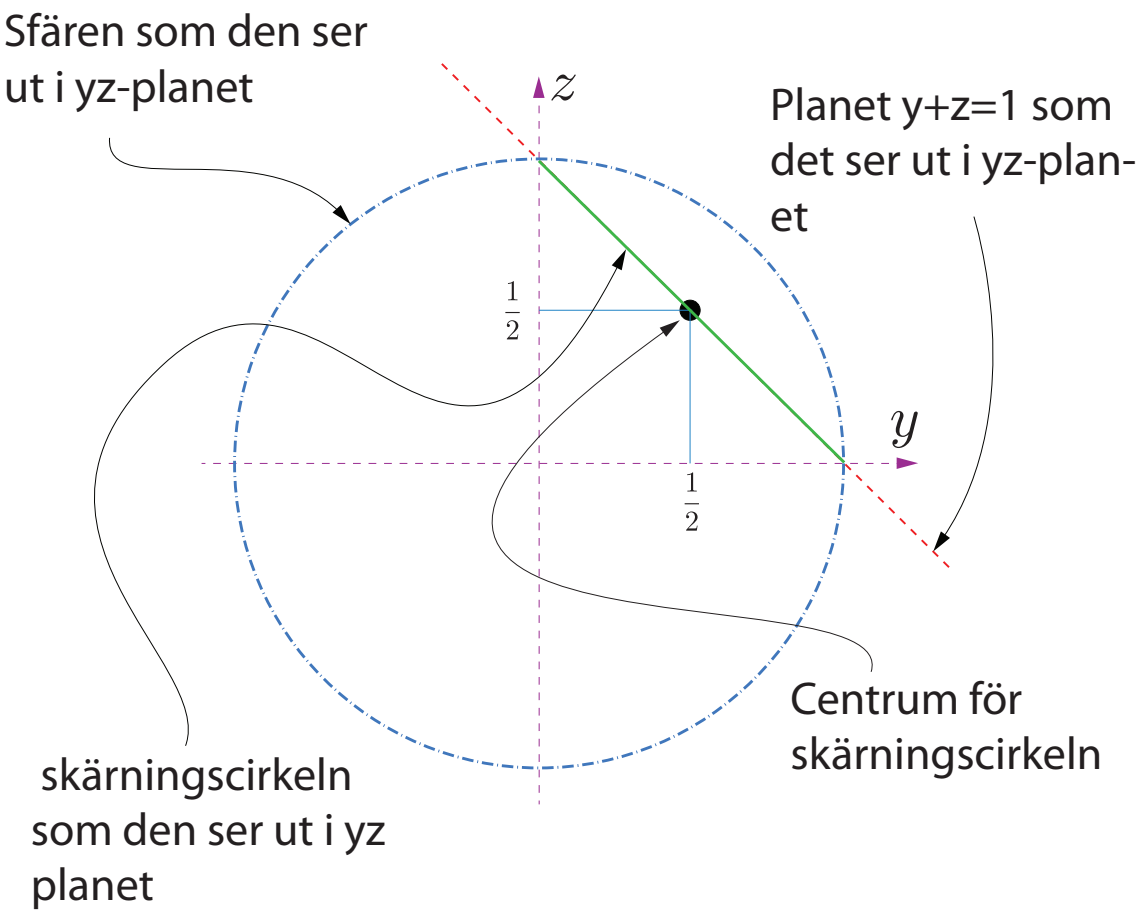

Figure 6: *Skärningen mellan cirkelskivan och sfären som det ser ut i yz planet. Notera cirkelns centrum ligger i yz-planet och dess position i denna figur definierar cirkelskivans radie. Det följer från figuren och Pythagoras sats att skärningscirkelns radie är* $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Eftersom divergensen för vårt fält blir

$$\nabla \bullet F = 2$$

så blir vårt flöde

$$I = \iiint\limits_T 2F dV = 2 \cdot \text{ volymen av tetraedern } = [\text{ formel } \frac{abc}{6}] = 2 \cdot \frac{3 \cdot 1 \cdot 1}{6} = 1$$

Tetraederns volym kan också beräknas med trippelintegralen

$$\int_0^3 \int_0^{1-x/3} \int_0^{1-y-x/3} dzdydx = \int_0^3 \int_0^{1-x/3} 1 - x/3 - y \; dydx = \int_0^3 \left[1 - x/3)y - y^2/2\right]_0^{1-x/3} dx$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^3 (1 - x/3)^2/2dx = \frac{1}{2} \left[-(1 - x/3)^3\right]_0^3 = \frac{1}{2}$$