HÖGSKOLAN I GÄVLE
ATM-Matematik
Mikael Forsberg
0734-41 23 31

För studenter i Flervariabelanalys

FLERVARIABELANALYS
MA012B
2014 02 21

Skrivtid: 09:00-14:00. Hjälpmedel är formelbladen från insidan av Pärmen i Adams Calculus, dessa formler bifogas tentan.
Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa. Börja varje ny uppgift på ny sida.
Använd ej baksidor. Skriv namn på varje inlämnat blad.

1. Beräkna och klassificera de kritiska punkterna till funktionen
$$f(x,y) = x + x^2 + xy + y^3$$

2. Låt $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ och $g(t) = (t, t^2, t^3)$. Beräkna derivatamatrisen till den sammansatta funktionen $H(t) = f(g(t))$.

3. Beräkna riktningsderivatan för funktionen $f(x,y,z) = xy\sin z$, i riktningen $v = (1,2,1)$, uträknad i punkten $P = (1,1,\pi/2)$.

4. Den så kallade Cobb-Douglas funktionen
$$f(x,y) = cx^a y^b$$
används inom Nationalekonomi för att beskriva totala produktionen av en vara mha kapitalinsatsen x och arbetsinsatsen y. Talen a och b är uppfyller oftast $a + b \leq 1$ och c är en konstant. I en studie[1] så används funktionen som en modell för Hummerfiske, där f mäter hummerfångsten som funktion av antal humrar x och antal burar y som läggs ut. I studien beräknar Henderson och Tugwell talen $a = 0.44$, $b = 0.48$ och $c = 2.26$ genom en empirisk studie och de beror på en mängd saker som var fisket sker, hur lång fiskesäsongen är, vattentemperatur etc.
För vår uppgift ställer vi upp bivillkoret
$$x + 3y = 920$$
som skulle kunna tolkas som en fiskekvota eftersom antalet burar y bestäms av den totala hummermängden. Beräkna x och y som ger maximum för hummerfångsten f givet denna fiskekvota.

5. Beräkna volymen av det område som begränsas av cylindern $x^2 + y^2 = 4$ och de två planen $y + z = 4$ och $z = 0$.

6. Rita upp integrationsområdet och gör ett lämpligt variabelbyte för att beräkna integralen
$$\int_3^{-3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{-\sqrt{9-x^2}} \int_0^{9-x^2-y^2} x^2 dz dy dx$$

[1] Henderson och Tugwell: *Exploitation of the Lobster Fishery: Some Empirical Results*, Journal of Environmental Economics and Management 6, 287-296(1979).

7. Visa att det tvådimensionella vektorfältet $F(x, y) = (e^y, xe^y)$ är konservativt och använd detta för att beräkna arbetet

$$W = \int_C F \bullet dr,$$

där C är den del av cirkeln $x^2 + y^2 = 1$ som ligger i övre halvplanet $y \geq 0$. Vad blir arbetet om vi går hela varvet runt cirkeln?

8. Låt K vara den cylindriska kropp som begränsas av $x^2 + y^2 = 9$, xy-planet och planet $z = 2$. Beräkna

$$\iint_{\partial K} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n} \, dS,$$

där $\mathbf{F} = (x^3, y^3, z^2)$ och $\mathbf{n}$ är den utåtriktade normalen till randytan ∂K till kroppen K

Svar till tentamen i Flervariabelanalys, 2014 02 21.

1.

2.

3.

4.

5. 16π

6.

7.

8.

Lösningar till tentamen i Flervariabelanalys, 2014 02 21.

1. Beräkna först kritiska punkter. Detta kräver att vi beräknar förstaderivatorna:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y + 1$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + 3y^2$$

I de kritiska punkterna så blir dessa derivator noll vilket ger oss två punkter

$$p_1 = (-1/3, -1/3) \quad \text{och} \quad p_2 = (-3/4, 1/2)$$

Nu behöver vi klassificera punkterna och vi använder andraderivatorna och determinanten till Hessianmatrisen för detta. Vi har att

$$H[x,y] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6y \end{bmatrix}$$

Vi får alltså att

$$\det H = 12y - 1$$

I våra punkter har vi

$$\det H|_{p_1} = -5 < 0, \quad \text{och} \quad \det H|_{p_2} = 5 > 0 \quad \text{och} \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{p_2} = 2 > 0$$

vilket gör att p_1 är sadelpunkt och p_2 ett lokalt min.

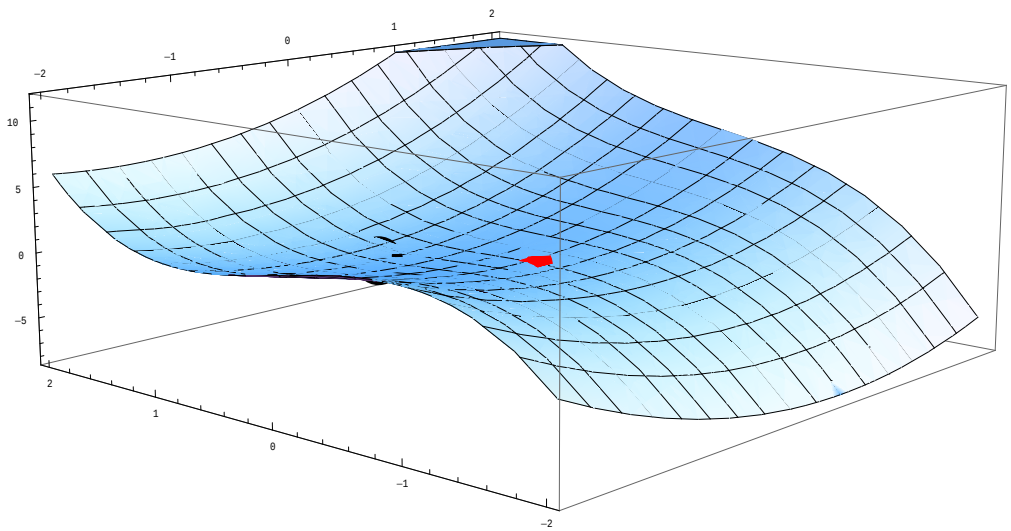

Figure 1: Grön punkt anger min och röd sadelpunkten

2. Vi har att $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, vilket visar att sammanstättningen är ok. Derivatamatrisen till den sammansatta funktionen ges av

$$DH = DF(g(t)) \cdot Dg(t)$$

Vi har att

$$DF = [2x, 2y, 2z] \quad \text{och } Dg = \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{bmatrix},$$

vilket ger att

$$DH = DF(g(t)) \cdot Dg(t) = [2 \cdot t, 2 \cdot t^2, 2 \cdot t^3] \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{bmatrix} = 2t + 4t^3 + 6t^5$$

Funktionen $H(t)$ är ju en reellvärd funktion av en variabel så derivatamatrisen blir därför en 1×1 matris (dvs ett tal) och det finns därför ett annat, enklare sätt: Beräkna sammansättningen $f(g(t))$ explicit och sedan derivera denna envariabelfunktion

$$H(t) = f(g(t)) = t^2 + t^4 + t^6 \quad \Rightarrow \quad H'(t) = 2t + 4t^3 + 6t^5$$

3. Gradienten till funktionen är

$$\boldsymbol{\nabla} f = (y \sin z, x \sin z, xy \cos z)$$

Riktningsderivatan i riktninen v blir

$$\begin{aligned} D_v F(x,y,z) &= \boldsymbol{\nabla} F_P \bullet \frac{v}{||v||} = \\ &= (y \sin z, x \sin z, xy \cos z) \bullet ((\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}) = \\ &= \frac{y \sin z + 2x \sin z + xy \cos z}{\sqrt{6}} \end{aligned}$$

Och när vi sätter in vår punkt P så får vi

$$DF_v(P) = \frac{\sin \pi/2 + 2 \sin \pi/2 + \cos \pi/2}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}}$$

4. Uppgiften handlar om att beräkna kritisk punkt för Lagrangefunktionen

$$L(x,y,z) = cx^a y^b + \lambda(x + 3 \cdot y - 920),$$

där vi noterar att vi behåller bokstäverna a, b och c så länge det går och så sätter vi in deras värden på slutet när det behövs. Partialderivatorna ska vara noll:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= a \cdot c \cdot x^{a-1} y^b + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= b \cdot c \cdot x^a y^{b-1} + 3\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x + 3 \cdot y - 920 = 0 \end{aligned}$$

Löser vi ut λ ur de två första ekvattionerna så får vi

$$-a \cdot c \cdot x^{a-1} y^b = -\frac{b}{3} \cdot c \cdot x^a y^{b-1} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{b}{3a} x$$

Sätter vi in detta i bivillkoret så får vi

$$x + 3 \cdot \frac{bx}{a} = 920 \quad \Rightarrow \quad \frac{a+b}{a} \cdot x = 920 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{920 \cdot a}{a+b},$$

vilket ger att

$$y = \frac{920 \cdot b}{3(a+b)}$$

Sätter vi in de konkreta siffrorna $a = 0.44$, $b = 0.48$ och $c = 2.26$ så får vi att

$$x = 440 \quad \Rightarrow \quad y = 160$$

5. Volymen kan skrivas som

$$V = \iint_R 4 - y dA,$$

där R är cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 4$ med radie 4 centrerad i origo. Området R kan sägas begränsad av den övre och den undre halvcirkeln som ges av graferna till funktionerna $\pm\sqrt{4-x^2}$. Vi kan alltså skriva

$$V = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4-y) dy dx = \cdots = 8 \underbrace{\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2} dx}_{=2\pi} = 16\pi$$

Vi noterar att den sista integralen (utan åttan alltså) är arean under kurvan $\sqrt{4-x^2}$ som ju är en cirkelbåge och arean här är därför arean av en halvcirkelskiva med radie 2 och blir alltså $\pi r^2/2 = 2\pi$.

6. Från integralen ser vi att $0 < z < 9 - x^2 - y^2$. Området R för x och y ges, enligt integralens gränser, av

$$R = \{-3 \leq x \leq 3, -\sqrt{9-x^2} \leq y \leq \sqrt{9-x^2}\}$$

som är en cirkelskiva med radien 3, centrerad i origo.

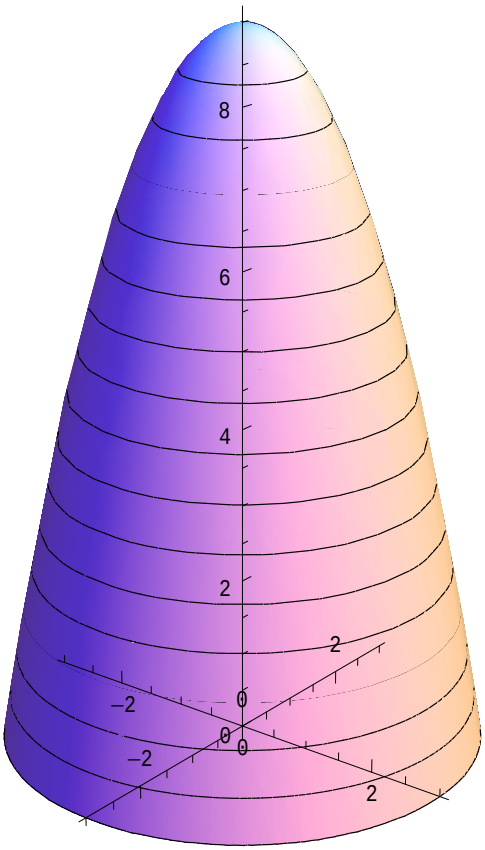

Figure 2: *Bild till lösningen av uppgift 6. Skärningen mellan kvadratytan $z = 9 - x^2 - y^2$ och xy-planet är cirkeln $x^2 + y^2 = 9$ Denna cirkel begränsar en cirkelskiva som också ligger mellan graferna till de två funktionerna $y = \pm\sqrt{9-x^2}$, som syns i uppgiftens integrationsgränser.*

Uppgiftens situation kan ses i figur 2. Notera speciellt att volymen har en cirkulär symmetri kring z-axeln. Detta motiverar att det är lämpligt att använda cylindriska koordinater för att beräkna integralen. Med cylindriska koordinater så har vi att bascirkeln R kan skrivas som

$$R = \{0 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

och integralen blir

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^{9-r^2}(r^2\cos^2\theta)rdzdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^{9-r^2} r^3\cos^2\theta dzdrd\theta = \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^3 [zr^3\cos^2\theta]_0^{9-r^2} drd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^3 [(9-r^2)r^3\cos^2\theta drd\theta = \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^3 [(9r^3 - r^5)\cos^2\theta drd\theta = \int_0^{2\pi} \underbrace{\left(\frac{9r^4}{4} - \frac{r^6}{6}\right)_0^3}_{=\frac{243}{4}} \cos^2\theta d\theta = \\
&= \frac{243}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta = \frac{243}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)d\theta = \frac{243\pi}{4}
\end{aligned}$$

7. Beräkna potential för fältet. Att en potential existerar visar att fältet är konservativt. Använd en sats för konservativa fält som säger att arbetsintegralen är lika med potentialens värde i slutpunkten minus dess värde i begynnelsepunkten. Potentialen blir

$$\Phi(x, y) = xe^y$$

Arbetet blir

$$W = \int_C F \bullet dr = \Phi(-1, 0) - \Phi(1, 0) = -1 - 1 = -2$$

Integralen runt cirkeln blir noll eftersom start och slutpunkt då är samma.

8. Idén här är att använda divergenssatsen

$$\iint_{\partial K} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n} dS, = \iiint_K \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F} dV,$$

Vi har att

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F} = 3x^2 + 3y^2 + 2z$$

Det är lämpligast att att använda cylindriska koordinater för att beräkna trippelintegralen. Man får

$$\iiint_K \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F} dV = \iiint_K 3x^2 + 3y^2 + 2z dV = \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^2 (3r^2 + 2z)rdzdrd\theta =$$

$$= \cdots = 279\pi,$$

där vi utnyttjat att kroppen K i cylindriska koordinater kan skrivas som

$$K = \{(r, \theta, z) : 0 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 3\}$$