HÖGSKOLAN I GÄVLE
TM-Matematik
Mikael Forsberg
0734-41 23 31

För studenter i Flervariabelanalys

FLERVARIABELANALYS
MA012B
2014 01 13

Skrivtid: 09:00-14:00. Hjälpmedel är formelbladen från insidan av Pärmen i Adams Calculus, dessa formler bifogas tentan.
Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa. Börja varje ny uppgift på ny sida.
Använd ej baksidor. Skriv namn på varje inlämnat blad.

1. Bestäm och klassificera alla kritiska punkter till funktionen $f(x,y) = x + x^2 + xy + y^3$.

2. Beräkna $\frac{dz}{dt}$ där $z = txy^2$, $x = t + \ln(y + t^2)$ och $y = e^t$

3. Funktionen $T(x,y) = x^2 + 2x + y^2 - 4y + 5$ anger hur temperaturen är fördelad i det reella planet. Beräkna den riktning i vilken temperaturen ökar mest i punkten $(1,0)$. Hur stor är temperaturökningen i denna punkt om man rör sig i x-axelns positiva riktning?

4. Beräkna kortaste avståndet från origo till ytan $xy^2z = 2$.

5. Beräkna
$$\iint_S (x+y)dA,$$
där S är det område i första kvadranten som ligger i cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq a^2$ och nedanför linjen $y = (\sqrt{3}) \cdot x$

6. Beräkna
$$\iiint_S z dV,$$
där S är den del av den första oktanten som ligger ovanför planet $x + y - z = 1$ och nedanför planet $z = 1$

7. Visa att vektorfältet
$$F(x,y,z) = \left(\frac{2x}{z}, \frac{2y}{z}, -\frac{x^2+y^2}{z^2}\right)$$
är konservativt och beräkna dess potentialfunktion $\phi(x,y,z)$.

8. Beräkna
$$\oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r},$$
där $\mathbf{F} = (-y^3, x^3, -z^3)$ och C är skärningskurvan mellan cylindern $x^2+y^2 = 1$ och planet $2x+2y+z = 3$ orienterad så att projektionen till xy-planet är orienterad moturs.

Svar till tentamen i Flervariabelanalys, 2014 01 13.

1. $p_1 = (-\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$ är ett lokalt minimum och $p_2 = (\frac{-1}{3}, \frac{-1}{3})$ är en sadelpunkt.

2. $ty^2\left(1 + \frac{y+2t}{y+t^2}\right) + 2txy^2 + xy^2$

3.

4. Kortaste avståndet är 2

5. $= \frac{a^3(\sqrt{3}+1)}{2}$

6. Integralen blir 17/24

7. $\phi(x, y, z) = \frac{x^2+y^2}{z}$

8. $\frac{3\pi}{2}$

Lösningar till tentamen i Flervariabelanalys, 2014 01 13.

1. Kritiska punkter är sådana som gör att de partiella förstaderivatorna blir noll. Förstaderivatorna blir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + 2x + y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 3y^2$$

Båda dessa derivator ska alltså vara noll och då kan vi från uttrycket för partialderivatan m.a.p. y lösa ut $x = -3y^2$ och sätta in i uttrycket för partialderivan för x:

$$1 + y - 6y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{12} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & ''+'' \\ -\frac{1}{3}, & ''-'' \end{cases}$$

Med dessa värden så kan vi lösa ut motsvarande värden för x:

$$x = \begin{cases} -\frac{3}{4} & \text{om } y = \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \text{om } y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Vi har alltså två kritiska punkter $p_1 = (\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$ och $p_2 = (\frac{-1}{3}, \frac{-1}{3})$.

Vi beräknar nu Hessianen, som är matrisen med andraderivator:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6y \end{bmatrix}$$

I p_1 så är hessianens determinant positiv och eftersom andraderivan m.a.p. x är positiv så ger andraderivatatestet att p_1 är ett lokalt minimum. I p_2 så är hessianens determinant negativ vilket indikerar att p_2 är en sadelpunkt.

2. Hur variablerna beror av varandra kan vi ställa upp i schemat i figur 1 Från detta schema får vi att:

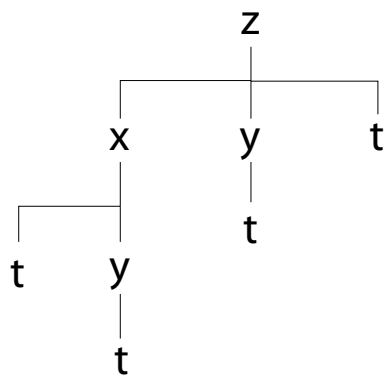

Figure 1: Schema som visar hur variabeln z beror av variablerna x, y och t

(vi utnyttjar också att $y = e^t$ ger att $\frac{\partial y}{\partial t} = e^t = y$

$$\frac{dz}{dt} = \underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}}_{ty^2(1+\frac{2t}{y+t^2})} + \underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}}_{ty^2(\frac{y}{y+t^2})} + \underbrace{\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}}_{2txy\cdot y} + \underbrace{\frac{\partial z}{\partial t}}_{=xy^2} =$$

$$= ty^2(1 + \frac{2t}{y+t^2}) + ty^2(\frac{y}{y+t^2}) + 2txy^2 + xy^2 =$$

$$= ty^2\left(1 + \frac{y+2t}{y+t^2}\right) + 2txy^2 + xy^2 = ty^2\left(1 + 2x + \frac{y+2t}{y+t^2}\right) + xy^2$$

3. Gradientens belopp i den aktuella punkter anger den maximala ökningen:

$$||\nabla(T)_{(1,0)}|| = ||(2x+2, 2y-4)||_{(1,0)} = ||(4,-4)|| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

Ökningen i en annan riktning, given av en enhetsvektor ges av skalärprodukten mellan gradientvektorn och den aktuella riktningen. I vårt fall har vi att positiva x-axeln ges av enhetsvektorn $e_x = (1,0)$ och då får vi att ökningen i denna riktning blir

$$\nabla(T)_{(1,0)} \bullet e_x = (4,-4) \bullet (1,0) = 4$$

4. Vi använder oss av Lagrange multiplikatormetod:

Vad ska minimeras? Avståndet till origo: $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ som är ekvivalent med att

$$x^2+y^2+z^2$$

ska minimeras

Vad är bivillkoret : Vi söker den punkt på ytan $xy^2z = 2$ som ligger närmast origo. Detta betyder att vår punkt ska uppfylla ytans ekvation, som blir vårt bivillkor.

Lagrangefunktion:

$$L(x,y,z,\lambda) = x^2+y^2+z^2+\lambda(xy^2z-2)$$

Lagrangefunktionens gradient ska vara noll ::

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= 2x+\lambda y^2 z = 0, \quad \Leftrightarrow \quad -\lambda = 2x/y^2z && (1)\\
\frac{\partial L}{\partial y} &= 2y+2\lambda xyz = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\lambda = 1/xz && (2)\\
\frac{\partial L}{\partial z} &= 2z+\lambda xy^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\lambda = 2z/xy^2 && (3)\\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= xy^2z-2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2y^4z^2 = 4 && (4)
\end{aligned}$$

(1), (2) and (3) ger oss att

$$2x^2 = y^2 = 2z^2 \tag{5}$$

och sätter vi in detta i (4) så får vi

$$x^8 = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1$$

Eftersom det minsta avståndet bara involverar kvadraterna x^2, y^2 och z^2 så behöver vi inte lägga ned tid på att få fram värden på x, y och z, som visserligen behövs för att bestämma de punkter där minima inträffar. Men uppgiften frågade inte efter detta vilket betyder att kvadraterna räcker för oss.

Nu ger ekvation (5) att $y^2 = 2$ och $z^2 = 1$ vilket ger oss det minsta avståndet

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{1+2+1} = 2$$

5. Eftersom området beskrivs enklast i polära koordinater så är det lämpligt att försöka överföra hela problemet till polära koordinater.

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad dA = rdrd\theta$$

Vi får först att S kan skrivas som

$$S = \{(r,\theta) : 0 \le r \le a, 0 \le \theta\pi/3\}$$

Integralen blir nu

$$\begin{aligned}\iint_S (x+y)dA &= \int_0^{\pi/3}\int_0^a (r\cos\theta + r\sin\theta)rdrd\theta = \\ &= \int_0^{\pi/3}\int_0^a (\cos\theta+\sin\theta)r^2drd\theta = \\ &= \frac{a^3}{3}\int_0^{\pi/3}\cos\theta+\sin\theta d\theta = \frac{a^3}{3}\frac{\sqrt{3}+1}{2} = \\ &= \frac{a^3(\sqrt{3}+1)}{2}\end{aligned}$$

6. Tricket med denna uppgift är att skriva om integrationsområdet så att det blir enkelt beskrivet m.a.p våra axlar. Området kan ses i figur 2.

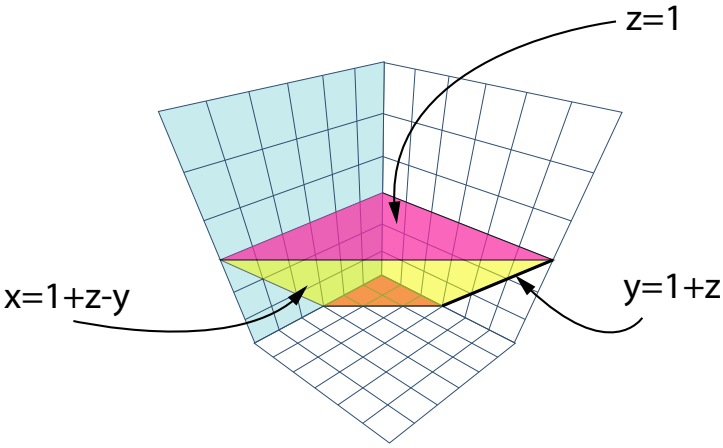

Figure 2: Integrationsområdet till uppgift 6

Vi har

$$S = \{(x,y,z) : 0 \le x \le 1+z-y, 0 \le y \le 1+z, 0 \le z \le 1\}$$

som ger oss integralen

$$\begin{aligned}\iiint_S zdV &= \int_0^1\int_0^{1+z}\int_0^{1+z-y} z\ dxdydz = \\ &= \int_0^1 z\int_0^{1+z}(1+z-y)dydz = \int_0^1 \underbrace{z(1+z)(1+z) - z(1+z)^2/2}_{=\frac{1}{2}z(1+z)^2=\frac{z+2z^2+z^3}{2}} dz = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 z+2z^2+z^3dz = \frac{17}{24}\end{aligned}$$

7. Börja med att visa att fältet är konservativt och detta är ekvivalent med att rotationen blir noll, dvs $\boldsymbol{\nabla}\times F = 0$: Vi har

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_1}{\partial y} &= 0 &= \frac{\partial F_2}{\partial x} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} &= -\tfrac{2x}{z^2} &= \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} &= -\tfrac{2y}{z^2} &= \frac{\partial F_3}{\partial y}\end{aligned}$$

vilket visar att rotationen är noll och fältet konservativt (förutsatt av vi verkligen är i en enkelt sammanhängande mängd) Vi beräknar nu en potentialfunktion $\Phi(x, y, z)$ och för denna gäller att

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{2x}{z}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{2y}{z}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{x^2 + y^2}{z^2},$$

Vi börjar med att integrera m.a.p. x, integrationskonstanten kan då bero av y och z:

$$\Phi(x, y, z) = \int \frac{2x}{z} dx = \frac{x^2}{z} + H(y, z) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{2y}{z}$$

Nu integrerar vi detta uttryck m.a.p y och får då

$$H(y, z) = \frac{y^2}{z} + G(z)$$

Sätter vi samman detta så får vi

$$\Phi(x, y, z) = \frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{z} + G(z) = \frac{x^2 + y^2}{z} + G(z),$$

där $G(z)$ är integrationskonstanten, som här får bero av z. Derivering m.a.p z ger att vi kan utnyttja den tredje förutsättningen

$$-\frac{x^2 + y^2}{z^2} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{x^2 + y^2}{z^2} + G'(z)$$

Vi får alltså att $G(z) = konst$. Vi har inga speciella krav som kan bestämma konstanten vilket gör att vi är fria att sätta den noll.

Vår slutliga potentialfunktion är alltså

$$\Phi(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{z}$$

8. Se figur 3

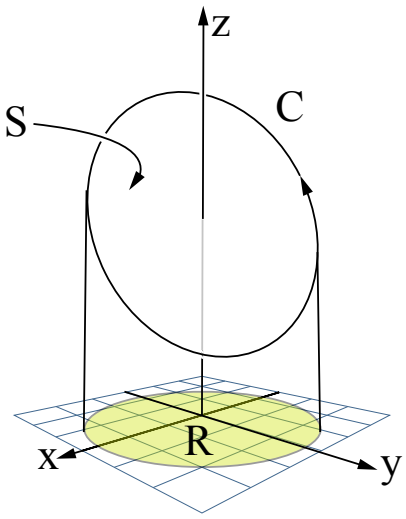

Figure 3: Figur till uppgift 8

C är den orienterade randen till en elliptisk skiva S som ligger i planet $2x + 2y + z = 3$ och ligger ovanför en cirkelskiva $x^2 + y^2 \leq 1$. Normalvektor för planet och ellipsskivan är $N = (2, 2, 1)$ och vi får därför ytelementet för ellipsskivan

$$NdS = (2, 2, 1)dxdy$$

Vi får också att

$$\boldsymbol{\nabla} \times F = (0, 0, 3(x^2 + y^2)$$

Då får vi m.h.a. Stokes Sats

$$oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_S \boldsymbol{\nabla} \times F \bullet N dS = \iint_R 3(x^2 + y^2) dxdy = 3 \int_0^1 \int 0^{2\pi} r^3 dr d\theta = \frac{3\pi}{2}$$