HÖGSKOLAN I GÄVLE
ATM-Matematik
Mikael Forsberg
0734-41 23 31

För studenter i Flervariabelanalys

FLERVARIABELANALYS
MA012B
2013 10 28

Skrivtid: 09:00-14:00. Hjälpmedel är formelbladen från insidan av Pärmen i Adams Calculus, dessa formler bifogas tentan.
Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa. Börja varje ny uppgift på ny sida.
Använd ej baksidor. Skriv namn på varje inlämnat blad.

1. Rita en skiss över hur grafen till funktionen $f(x,y) = x^3y + x^3 + xy^2 - x$ ser ut i kvadraten $[-1,1]^2$. Beräkna eventuella kritiska punkter i detta område och klassificera dem.
2. Låt $f(x,y,z) = x^2y + xz^2 + xyz$. Beräkna
   (a) Tangentplanet till nivåytan för f som går genom punkten $p = (1,1,-1)$
   (b) Riktningsderivatan i riktningen $u = (1,2,0)$ för funktionen i p.
   (c) Den riktning i vilken funktionen ökar mest? Hur stor är denna ökning?
3. Antag att $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ är en deriverbar funktion och sätt $u = f(x,y,z)$. Vidare så låter vi
$$x = \sin t, \qquad y = \cos t, \qquad z = e^t.$$
   Beräkna $\frac{du}{dt}$ då $t = 0$ givet att $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_p = 2$ och $\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_p = -1$, där $p = (0,1,1)$
4. Beräkna kortaste avståndet från origo till ytan $xyz^2 = 2$.
5. Beräkna integralen
$$I_5 = \iint_D x\cos y \; dA,$$
   där D är det område i första kvadranten som begränsas av koordinataxlarna och grafen till funktionen $y = 1 - x^2$. Gör också en skiss över integrationsområdet D.
6. Beräkna integralen
$$I_6 = \iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dV,$$
   där $B = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ är enhetsklotet i $\mathbb{R}^3$.
7. Visa att fältet $\mathbf{F} = (y^2 + z^2, 2xy, 2xz)$ är konservativt och beräkna en potentialfunktion för fältet.
8. Beräkna
$$I_8 = \iint_S \underbrace{\nabla \times F}_{=\text{ curl } F} \bullet \mathbf{N} dS,$$
   där S är den del av sfären $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 8$ som ligger ovanför xy-planet och N är den utåtriktade enhetsnormalen och
$$F = (y^2 \cos xz, x^3 e^{yz}, -e^{-xyz})$$

Svar till tentamen i Flervariabelanalys, 2013 10 28.

1.
$$(\sqrt{\frac{2}{5}}, -\frac{1}{5}) \text{ lokalt max }, \quad (-\sqrt{\frac{2}{5}}, -\frac{1}{5}), \text{ lokalt min }.$$

2. (a) Tangentplanets ekvation blir $2x - z = 3$

   (b) Riktningsderivatan är $2/\sqrt{5}$

   (c) Funktionen ökar mest i gradienten $\nabla f|_p = (2, 0, -1)$. Ökningen är $||\nabla f|_p|| = \sqrt{5}$

3. $\frac{du}{dt} = 1$

4. Kortaste avståndet är 2

5. $\frac{1-\cos 1}{2}$

6. $4\pi(e-1)/3$

7. Potentialfunktionen blir $\phi(x, y, z) = x(y^2 + z^2)$

8. 12π

Lösningar till tentamen i Flervariabelanalys, 2013 10 28.

1. Grafen kan skissas: , t.ex. genom att hålla ena variabeln konstant och rita den kurva som ytan då ger . Man upprepar för flera olika värden av variablerna. I figur 1 så har ytan plottats mha Mathematica.

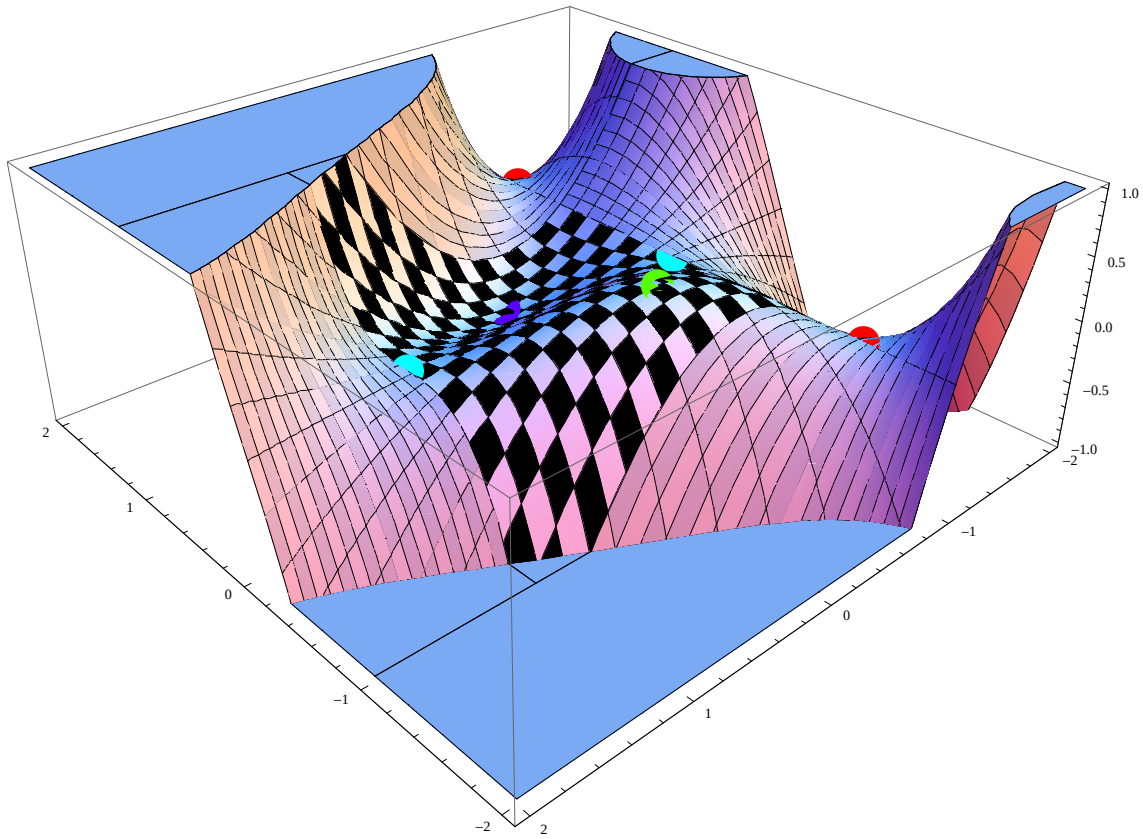

Figure 1: *Grafen till funktionen i uppgift 1. Det schackrutiga området är den del av grafen som ligger ovanför kvadraten* $[-1,1]^2$. *Deb gröna och den blå "pluppen" markerar läget för de kritiska punkterna som ligger i vårt område medan de röda representerar de två sadelpunkterna som ligger utanför området. Slutligen så har vi de ljusblå punkterna som är de kritiska punkterna* $p_{5,6}(0,\pm 1)$ *som också är sadelpunkter.*

Vi beräknar kritiska punkter:
En kritisk punkt definieras av att gradienten till funktionen blir noll.

$$\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) = (3x^2y + 3x^2 + y^2 - 1, x^3 + 2xy)$$

Gradienten noll ger oss följande ekvationssystem

$$\begin{aligned} 3x^2y + 3x^2 + y^2 - 1 &= 0 \quad (1) \\ x^3 + 2xy &= 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Ekvation 2 ger oss medför att $p_{5,6} = (0, \pm 1)$ är två kritiska punkter. När man undersöker dessa så får man att de är sadelpunkter. Men 2 ger oss alternativet att

$$x^2 = -2y \quad (3)$$

som insatt i ekvation 1 ger oss

$$-5y^2 - 6y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \qquad y = \begin{cases} -\frac{1}{5} \\ -1 \end{cases}$$

Dessa y-värden kan vi nu sätta in i 3 och få fram motsvarande värden på x:

$$x = \begin{cases} \pm\sqrt{\frac{2}{5}} & \text{för }, y = -\frac{1}{5} \\ \pm\sqrt{2} & \text{för } y = -1. \end{cases}$$

Detta innebär att vi har fyra punkter där gradienten försvinner :

$$p_1 = (\sqrt{\frac{2}{5}}, -\frac{1}{5}), \quad p_2 = (-\sqrt{\frac{2}{5}}, -\frac{1}{5}), \quad p_3 = (\sqrt{2}, -1), \quad p_4 = (-\sqrt{2}, -1)$$

Men bara de två första av punkterna ligger in kvadraten $[-1, 1]^2$

Vi klassificerar de kritiska punkterna

Vi använder oss av Hessianen, dvs matrisen med funktionens andraderivator:

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} 6x(y+1) & 3x^2 + 2y \\ 3x^2 + 2y & 2x \end{bmatrix}$$

som i punkterna p_1 och p_2 blir

$$H(p_1) = \begin{bmatrix} \frac{24\sqrt{\frac{2}{5}}}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & 2\sqrt{\frac{2}{5}} \end{bmatrix} \qquad H(p_2) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5}\left(24\sqrt{\frac{2}{5}}\right) & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -2\sqrt{\frac{2}{5}} \end{bmatrix}$$

Vi har att determinanten för de båda matriserna är positiva ($= 16/5$). Eftersom $\partial^2 F/\partial x^2$ är positiv i p_1 och negativ i p_2 så ger andraderivatatestet att vi har ett lokalt minimum i p_1 och ett lokalt maximum i p_2.

Extra information:: de övriga kritiska punkterna

Här är lite mer information för den nyfikne: I p_3 och p_4 (som ligger utanför vårt område) får vi hessianmatriserna

$$H(p_3) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad H(p_4) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

som båda har negativ determinant (=-16) vilket betyder att de är sadelpunkter enligt andraderivatatestet. På samma sätt har vi för $p_5 = (0, 1)$ och $p_6 = (0, -1)$:

$$H(p_5) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0\sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad H(p_6) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Dessa båda matriser har determinant -4 och p_5 och p_6 är alltså sadelpunkter.

2. (a) Tangentplanet till nivåytan i vår punkt ges av en ekvation av typen

$$ax + by + cz = d,$$

där normalvektorn $n = (a, b, c)$ i princip är gradientvektorn till vår funktion i p och d bestäms av att planet ska gå genom punkten p. Vi får

$$n = \nabla f|_p = \left(2xy + yz + z^2, x^2 + xz, xy + 2xz\right)|_p = (2, 0, -1)$$

Vi har nu tangentplanets ekvation

$$2x - z = d.$$

Detta plan ska alltså gå genom punkten p och sätter vi in p i vänster led så får vi att $d = 3$ vilket gör att tangentplanets ekvation blir

$$2x - z = 3$$

(b) Riktningsderivatan i en punkt p för en funktion f i en riktning v, där v är en enhetsvektor ges av

$$D_v f = v \bullet \nabla f_p$$

I vårt fall så är u inte en enhetsvektor så vi måste börja med att normera den

$$v = \frac{u}{||u||} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)$$

Vi får därför att riktningsderivatan i vår riktning u blir

$$D_v f = \frac{u}{||u||} \bullet \nabla f|p = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0) \bullet (2,0,-1) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

(c) Funktionen ökar mest i gradientens riktning och graden av ökning blir gradientvektorns längd eller om vi beräknar riktningsdervatan map gradientvektorns riktning så får vi, där vi ska komma ihåg att vi måste normera gradientvektorn

$$D_{\nabla f/||\nabla f||} f|_p = \frac{\nabla f|_p}{||\nabla f|_p||} \bullet \nabla f|_p = \frac{1}{||\nabla f|_p||} \cdot (\underbrace{\nabla f|_p \bullet \nabla f|_p}_{||\nabla f|_p||^2}) = ||\nabla f|_p|| = \sqrt{5}$$

3. Vi noterar att sammansättningen

$$u(t) = f \circ (x(t), y(t), z(t)) = f(x(t), y(t), z(t))$$

är en funktion av en variabel m.a.p. den enda variabeln t. Noterar vi att $(x(0), y(0), z(0)) = (0,1,1) = p$ så ger kedjeregeln oss

$$\begin{aligned}
\left.\frac{du}{dt}\right|_0 &= \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_p}_{=2} \left.\frac{dx}{dt}\right|_0 + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_p \left.\frac{dy}{dt}\right|_0 + \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_p}_{=-1} \left.\frac{dz}{dt}\right|_0 + = \\
&= 2 \cdot \cos 0 + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_p \cdot (-\sin 0) + (-1) \cdot e^0 = \\
&= 2 + 0 - 1 = 1
\end{aligned}$$

Alternativt: Man kan sätta $g(t) = (x(t), y(t), z(t))$ och notera att $u(t) = f(g(t))$, och att $p = g(0)$. Då är $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ och för denna sammansättning så ger kedjeregeln oss matrisuttrycket

$$\begin{aligned}
\left.\frac{du}{dt}\right|_0 &= Df|_{g(0)} \cdot Dg|_0 = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right]_{g(0)} \cdot \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{bmatrix}_0 = \\
&= \left[2, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_p, -1\right] \cdot \begin{bmatrix} \cos 0 \\ -\sin 0 \\ e^0 \end{bmatrix} = \left[2, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_p, -1\right] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1
\end{aligned}$$

4. Vi använder oss av Lagrange multiplikatormetod:

Vad ska minimeras? Avståndet till origo: $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ som är ekvivalent med att

$$x^2 + y^2 + z^2$$

ska minimeras

Vad är bivillkoret : Vi söker den punkt på ytan $xyz^2 = 2$ som ligger närmast origo. Detta betyder att vår punkt ska uppfylla ytans ekvation, som blir vårt bivillkor.

Lagrangefunktion:

$$L(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(xyz^2 - 2)$$

Lagrangefunktionens gradient ska vara noll ::

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= 2x + \lambda yz^2 = 0, \quad \Leftrightarrow \quad -\lambda = 2x/yz^2 && (4)\\
\frac{\partial L}{\partial y} &= 2y + \lambda xz^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\lambda = 2y/xz^2 && (5)\\
\frac{\partial L}{\partial z} &= 2z + 2\lambda xyz = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\lambda = 1/xyz && (6)\\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= xyz^2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2y^24z^4 = 4 && (7)
\end{aligned}$$

4, 5 and 6 ger oss att

$$x^2 = y^2 = 2z^2 \tag{8}$$

och sätter vi in detta i 7 så får vi

$$x^8 = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1$$

Eftersom det minsta avståndet bara involverar kvadraterna x^2, y^2 och z^2 så behöver vi inte lägga ned tid på att få fram värden på x, y och z, som visserligen behövs för att bestämma de punkter där minima inträffar. Men uppgiften frågade inte efter detta vilket betyder att kvadraterna räcker för oss.

Nu ger ekvation 8 att $y^2 = 1$ och $z^2 = 2$ vilket ger oss det minsta avståndet

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{1 + 1 + 2} = 2$$

5. Vi ritar upp området Vi ser att y begränsas av $y = 0$ nerifrån och av $1 - x^2$ ovanifrån. x ligger då

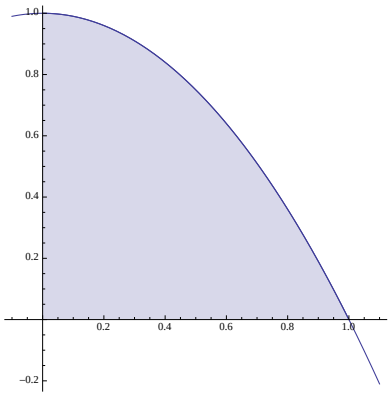

Figure 2: Integrationsområdet D i uppgift 5.

mellan noll och ett vilket ger att integralen kan skrivas

$$I_5 = \int_0^1 \int_0^{1-x^2} x \cos y dy dx = \int_0^1 x \left[\int_0^{1-x^2} \cos y dy \right] dx$$

Vi integrerar alltså först med avseende på y och får då:

$$I_5 = \int_0^1 x \cdot [\sin y]_0^{1-x^2} dx = \int_0^1 x \sin(1 - x^2) dx =$$

För att lösa denna integral så gör vi substitutionen

$$u = 1 - x^2, \quad du = -2xdx, \quad \Rightarrow \quad xdx = -\frac{1}{2}du, \quad [x = 0 \text{ ger } u = 1], \quad [x = 1 \text{ ger } u = 0],$$

som gör att integralen kan skrivas

$$= -\frac{1}{2}\int_1^0 \sin u du = \frac{1}{2}(1 - \cos 1)$$

6. Det känns väl som en "no-brainer" att använda sfäriska koordinater?

Sfäriska koordinater ::

$$\left.\begin{array}{rl} x = & r\cos\theta\sin\phi \\ y = & r\sin\theta\sin\phi \\ z = & r\cos\phi \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rl} x^2 + y^2 + z^2 = & r^2 \\ dV = & r^2\sin\phi dr d\phi d\theta \\ B = & \{0 \le r \le 1, 0 \le \phi \le \pi, 0 \le \theta \le 2\pi\} \end{array}\right.$$

Detta ger att vår integral blir

$$\begin{aligned} I_6 &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 e^{r^3} r^2 \sin\phi dr d\phi d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 e^u \sin\phi du d\phi d\theta = \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (e^u)_0^1 \sin\phi d\phi d\theta = \frac{(e-1)}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\phi d\phi d\theta = \\ &= \frac{(e-1)}{3}\int_0^{2\pi} \underbrace{[-\cos\phi]_0^{\pi}}_{=2} d\phi = \frac{2(e-1)}{3}\underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{=2\pi} = \\ &= \frac{4\pi(e-1)}{3} \end{aligned}$$

Notera att i andra likheten i denna räkning gjordes substitutionen

$$u = r^3, \quad du = 3r^2 dr \quad \Rightarrow \quad r^2 dr = \frac{1}{3}du, \quad [r = 0 \text{ ger } u = 0] \text{ och } [r = 1 \text{ ger } u = 1]$$

7. Vi börjar med att visa att fältet är konservativt genom att visa att $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 + z^2 & 2xy & 2xz \end{bmatrix} = \\ &= (\underbrace{\frac{\partial}{\partial y}[2xz] - \frac{\partial}{\partial z}[2xy]}_{=0-0=0}, \underbrace{-(\frac{\partial}{\partial x}[2xz] - \frac{\partial}{\partial z}[y^2 + z^2])}_{-2z+2z=0}, \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}[2xy] - \frac{\partial}{\partial y}[y^2 + z^2]}_{=2y-2y=0} = \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

På ett enkelt sammanhängande område så är detta ekvivalent med att fältet är konservativ. I uppgiften så är inte området specificerat så vi går vidare och beräknar potentialfunktionen. Om vi lyckas med detta så är det ett slutgiltigt bevis för att fältet är konservativt.

Vi söker alltså en potentialfunktion till fältet $\mathbf{F}$, dvs en funktion $\phi(x, y, z)$ sådan att $\nabla\phi = \mathbf{F}$

Vi har, till att börja med, att integrering m.a.p x ger

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = y^2 + z^2 \quad \Rightarrow \quad \phi(x, y, z) = x(y^2 + z^2) + H(y, z)$$

Vi deriverar nu detta uttryck m.a.p. y och utnyttjar att denna derivata ska vara lika med andra komponenten för vårt fält.

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 2xy \quad \Rightarrow \quad 2xy + \frac{\partial H}{\partial y} = 2xy$$

som direkt leder till att $\frac{\partial H}{\partial y} = 0$, vilket betyder att H är konstant m.a.p y och integrerar vi detta med avseende på y så får vi

$$H(y,z) = K(z) \quad \Rightarrow \quad \phi(x,y,z) = x(y^2+z^2) + K(z)$$

Slutligen har vi att

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 2xz \quad \Rightarrow \quad 2xz + K'(z) = 2xz \quad \Rightarrow \quad K(z) = \text{ konstant}$$

Konstanten är godtycklig så vi väljer $K = 0$ och vår potentialfunktion blir således

$$\phi(x,y,z) = x(y^2+z^2)$$

En enkel verifikation visar att vi verkligen har $\nabla\phi = \mathbf{F}$ vilket gör att vi är klara med uppgiften.

8. Idén i denna uppgift är att cirkeln $x^2+y^2=4$ är randkurva till sfärytan. Då kan vi använda Stokes sats för att reducera till en integral över denna kurva. Men sedan är cirkeln också rand till cirkelskivan $D = \{x^2+y^2 \leq 4\}$ vilket gör att vi kan använda Stokes sats igen och få en integral över denna cirkelskiva. M.a.o vi har

$$I_8 = \iint_S \boldsymbol{\nabla} \times F \bullet \mathbf{N} dS = [\text{ Stokes! }] = \oint F \bullet dr = \iint_D \boldsymbol{\nabla} \times F \bullet \mathbf{k}\, dS,$$

där $\mathbf{k} = (0,0,1)$ är den uppåtriktade normalen för cirkelskivan D.
För att beräkna den sista integralen så behöver vi beräkna $\boldsymbol{\nabla} \times F \bullet \mathbf{k}$ där vi ska notera att cirkelskivan ligger i xy-planet och där har vi $z = 0$ Vi låter

$$F = (\underbrace{y^2 \cos xz}_{=F_1}, \underbrace{x^3 e^{yz}}_{F_2}, \underbrace{-e^{-xyz}}_{F_3})$$

vilket ger

$$\boldsymbol{\nabla} \times F \bullet \mathbf{k} = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{bmatrix} \bullet \mathbf{k} =$$

$$= \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 3x^2 e^{yz} - 2y\cos xz = [\text{ kom ihåg att } z = 0\,] = 3x^2 - 2y$$

Vår integral blir nu

$$I_8 = \iint_D 3x^2 - 2y dxdy = \iint_D 3x^2 dxdy - 2 \underbrace{\iint_D y\, dxdy}_{=0} =$$

$$= 3\iint_D x^2 dxdy = [\text{ polära koordinater }] = 3int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2 \cos^2\theta r dr d\theta =$$

$$= 3\int_0^{2\pi} \underbrace{\cos^2\theta}_{=\frac{1-\cos 2\theta}{2}} \underbrace{\int_0^2 r^3 dr}_{=\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 4} = 6\int_0^{2\pi} 1 - \cos 2\theta d\theta = 6 \cdot 2\pi = 12\pi$$