HÖGSKOLAN
I GÄVLE
ATM-Matematik
Mikael Forsberg
0734-41 23 31

För studenter i Flervariabelanalys

FLERVARIABELANALYS
mk012b
2013 08 22

Skrivtid: 09:00-14:00. Hjälpmedel är formelbladen från insidan av Pärmen i Adams Calculus, dessa formler bifogas tentan.
Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa. Börja varje ny uppgift på ny sida.
Använd ej baksidor. Skriv namn på varje inlämnat blad.

1. Beräkna tangentplanet för grafen till funktionen
$$f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$$
i punkten $(1,-2)$

2. Beräkna JakobiMatrisen för avbildningen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.
$$f(x,y,z) = (x^2+yz, y^2 - x\ln x)$$

3. Beräkna en vektor som är tangent med skärningskurvan till de två cylindrarna
$$x^2+y^2=2, \quad \text{och} \quad y^2+z^2=2$$
i punkten $(1,-1,1)$

4. Beräkna största och minsta värden för funktionen $f(x,y,z) = xyz$ på sfären $x^2+y^2+z^2 = 12$

5. Beräkna volymen av det område som begränsas nedåt av xy-planet, uppåt av konen $z = 10 - \sqrt{x^2+y^2}$ och som ligger innanför cylindern $x^2+y^2 = 10y$

6. Beräkna längden av kurvan $r(t) = (5\cos t, 5\sin t, 3t)$, $t \in (0, 2\pi)$.

7. Beräkna det arbete som utförs av kraftfältet
$$\mathbf{F} = (x+y, x-z, z-y)$$
längs kurvan $\gamma(t) = (1-t, -2t, 4t-1)$ som förbinder punkterna $(1,0,-1)$ och $0,-2,3)$

8. Beräkna flödet av fältet[1]
$$\mathbf{F} = (x^2+y^2+z^2) \text{ skulle ha varit } \mathbf{F} = (x^2, y^2, z^2)$$
ut genom tetraedern $x+y+z \le 3$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

[1] observera feltrycket...

Svar till tentamen i Flervariabelanalys, 2013 08 22.

1. $2x - 4y - 5z = 10 - 5\ln 5$

2.
$$Df = \begin{pmatrix} 2x & z & y \\ -\log x - 1 & 2y & 0 \end{pmatrix}$$

3. En tangentvektor blir $(1, 1, 1)$

4. Punkterna
$$(2,2,2), (2,-2,-2), (-2,2,-2), (-2,-2,2) \qquad \text{ger maximivärdet} 8$$
och punkterna
$$(2,2,-2), (2,-2,2), (-2,2,2), (-2,-2,-2) \qquad \text{ger minimivärdet} -8$$

5. $(2\pi - 32/9)5^3$

6. $2\pi\sqrt{34}$

7. Arbetet som utförs av det konservativa fältet $\mathbf{F}$ blir $\frac{19}{2}$

8. uppgiften utgår pga tryckfel.

Lösningar till tentamen i Flervariabelanalys, 2013 08 22.

1. Om vi bildar funktionen

$$g(x,y,z) = f(x,y) - z$$

så blir grafen till f nivåytan $g = 0$. Om vi beräknar gradienten till g:

$$\nabla g = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1) = (\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2}, -1)$$

så får vi ett normalvektorfält på ytan. I varje punkt på ytan ger gradienten därför en normalvektor och denna vektor är tangentplanets normalvektor. I punkten $(x_o, y_o) = (1, -2)$ har vi normalvektorn

$$\nabla g|_{(1,-2)} = (\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, -1) = \frac{n}{5} \quad \Rightarrow \quad n = (2, -4, -5)$$

Ekvationen för tangentplanet ges av $n \bullet (x - x_o), y - y_o, z - z_o) = 0$, där $z_o = f(x_o, y_o) = \ln 5$. Vi vår därför att planets ekvation blir

$$2x - 4y - 5z = 10 - 5\ln 5$$

2. Jakobimatrisen är avbildningens derivatamatris

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \quad = \begin{pmatrix} 2x & z & y \\ -\log x - 1 & 2y & 0 \end{pmatrix}$$

3. Idé: beräkna normalvektor till vardera yta i den aktuella punkten. Tangentvektor till skärningskurvan är vinkelrät mot båda dessa normalvektorer och kan därför beräknas som kryssprodukten av de båda normerna.

Vi beräknar de båda normalvektorerna: Eftersom respektive yta är nivåytor till respektive funktion

$$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 \qquad g_2(x,y,z) = y^2 + z^2$$

Så har vi att normalvektorerna beräknas med dessa funktioners gradienter:

$$2n_1 = \nabla g_1|_{(1,-1,1)} = (2x, 2y, 0)_{(1,-1,1)} = (2, -2, 0), \qquad 2n_2 = \nabla g_2|_{(1,-1,1)} = (0, 2y, 2z)_{(1,-1,1)} = (0, -2, 2),$$

Här är n_1 och n_2 valda så att vi ska få ett enkelt uttryck, ni ser väl att man kan förkorta bort 2 i båda led. En tangentvektorn ges nu av

$$T = n_1 \times n_2 = (1, -1, 0) \times (0, -1, 1) = -(1, 1, 1)$$

4. I denna uppgift ska vi minimera funktionen xyz givet att (x, y, z) är beläget på sfären centrerad i origo med radien $\sqrt{12}$. Vi angriper problemet genom att först bilda Lagrangefunktionen

$$L(x,y,z,\lambda) = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 12)$$

Vi söker kritiska punkter till Lagrangefunktionen genom att söka nollställen till funktionens derivator:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = yz + 2x\lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = xz + 2y\lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial z} = xy + 2z\lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - 12 = 0$$

Löser vi ut λ från de tre första ekvationerna genom att likställa dem parvis får vi att lösningarna måste uppfylla

$$x^2 = y^2 = z^2$$

Vilket ger oss lösningar av typen $(\pm a, \pm a, \pm a)$, där a är ett godtyckligt reellt tal. Vi använder nu den fjärde ekvationen för att försöka bestämma värde på a denna ekvation ger oss

$$3a^2 = 12 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad a = \pm 2$$

och detta ger oss lösningar av typen $(\pm 2, \pm 2, \pm 2)$. Detta är åtta olika punkter i det tredimensionella rummet. Det är inte svårt att se att det maximala värdet för xyz blir 8 som uppfylls i alla punkter där vi har ett jämnt antal negativa koordinater och en positiv och det minsta -8 får vi för koordinater med udda antal negativa komponenter.

Max 8 får vi således i punkterna

$$(2,2,2), (2,-2,-2), (-2,2,-2), (-2,-2,2) \qquad \text{ger maximivärdet } 8$$

och minimum -8 får vi i punkterna

$$(2,2,-2), (2,-2,2), (-2,2,2), (-2,-2,-2) \qquad \text{ger minimivärdet } -8$$

5. Låt oss börja med att titta på ytorna som ingår i uppgiften: Notera att i vår uppgift så är $a = 5$

(a) Området ligger ovanför xy-planet. Denna är enkel att beskriva: z=0.

(b) $x^2 + y^2 = 2ay$. Detta ska vara en cylinder enligt uppgiften. Detta kan man se om man skriver om ekvationen lite

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2ay = 0 \Rightarrow x^2 + (y-a)^2 - a^2 = 0 \Rightarrow x^2 + (y-a)^2 = a^2,$$

där jag i andra implikationen kvadratkompletterat m.a.p. y. Den sista likheten ger oss en cirkel med centrum i $x, y) = (0, a)$ och med radie a. z-koordinaten är godtycklig så cylinderns sträcker ut sig parallell med z-axeln och är en cirkel i varje snitt med ett plan som är parallellt med xy-planet.

Vi kommer att uttrycka allt mha cylindriska (polära) koordinater och då kommer $x^2+y^2 = 2ay$ att skrivas $r = 2a\sin\phi$ som alltså är beskrivningen av vår cylinder i polära koordinater. Uppgiften frågar dessutom om det inre av denna cylinder och detta måste i så fall innebära att $0 \le r \le 2a\sin\phi$. Ett varv runt cirkeln åstadkoms när ϕ varierar från noll till π.

(c) Den sista begränsningsytan ges av konen $z = 2a - \sqrt{x^2+y^2}$. Om $y = 0$ så reduceras detta till $z = 2a - |x|$ (och motsvarande om $x = 0$. I cylindriska koordinater så har vi att $z = 2a - r$.

Sammantaget har vi alltså att vårt område kan beskrivas som

$$0 \le z \le 2a - r, \quad 0 \le r \le 2a\sin\phi, \quad 0 \le \phi \le \pi.$$

Den första olikheten säger att z ska ligga ovanför xy-planet och nedanför konen. Den andra olikheten säger att vi ska ligga inom cylindern. Den tredje och sista olikheten ger oss cylinderns kant.

Om vi kallar området vi söker volymen av för D så ges volymen av trippelintegralen

$$\begin{aligned} V &= \iiint_D dV = \text{cylindriska koord} = \iiint_D r dz dr d\phi = \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^{2a\sin\phi} \int_0^{2a-r} r dz dr d\phi = \\ &= 2\int_0^{\pi/2} \int_0^{2a\sin\phi} \int_0^{2a-r} r dz dr d\phi = \end{aligned}$$

I den sista likheten utnyttjas att området är symmetriskt kring y-axeln.

Ovanstående steg brukar ofta vara det svåra vid trippelintegrering och det som man som flervariabelanalysstudent behöver jobba med (det är ju detta som kursen handlar om). Men sedan finns det ju naturligtvis svårigheter att utföra de praktiska integrationsberäkningarna. Integrationen m.a.p. z och r borde gå ganska lätt och resultatet blir

$$8a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^2\phi - \frac{2}{3}\sin^3\phi d\phi = \cdots = (2\pi - 32/9)a^3,$$

För att beräkna denna envariabelintegral så behöver man förmodligen använda sig av olika trigonometriska omskrivningar (t.ex. trigonometriska ettan och sinus och cosinus för dubbla vinkeln, formler som finns innanför pärmen I Adams...)

6. Vi har att längden för en kurva med parametrisering $r(t)$ från $t = t_1$ till $t = t_2$ beräknas enligt

$$\int_{t_1}^{t_2} ||r'(t)||dt.$$

Eftersom $r(t) = (5\cos t, 5\sin t, 3t)$, $t \in (0, 2\pi)$, så har vi att

$$r'(t) = (-5\sin t, 5\cos t, 3) \quad \Rightarrow \quad ||r'(t)|| = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

och längden från 0 till 2π blir därför

$$\int_0^{2\pi} ||r'(t)||dt = \sqrt{34}\int_0^{2\pi} dt = 2\pi\sqrt{34}$$

7. Idén är att nyttja att fältet är konservativt så att arbetet, som ges av linjeintegralen, bara beror av begynnelse och slutpunkt. Fältet $F = (x+y, x-z, z-y)$ är verkligen konservativt eftersom $\nabla \times F = 0$ gäller i hela planet. En potential är $\phi(x,y,z) = \frac{x^2+z^2}{2} + y(x-z)$ som vi får fram genom att lösa systemet $\nabla\phi = F$.

Låt $p = (1, 0, -1)$ och $q = (0, -2, 3)$ och då får vi att arbetet blir

$$\int_p^q F \bullet dr = \phi|_p^q = \left[\frac{x^2+z^2}{2} + y(x-z)\right]_{(1,0,-1)}^{(0,-2,3)} = \frac{19}{2}$$

8. Denna uppgift har ett feltryck. Fältet **F** skulle varit (x^2, y^2, z^2). Som uppgiften är formulerad så har den inte mycket substans och kommer att utgå från rättningen. Den som är intresserad av lösningen till den korrekta formuleringen av uppgiften kan kolla in Adams uppgift 16.4.7.