HÖGSKOLAN
I GÄVLE
ATM-Matematik
Mikael Forsberg
0734-41 23 31

För studenter i Flervariabelanalys

FLERVARIABELANALYS
mk012b
2013 06 10

Skrivtid: 09:00-14:00. Hjälpmedel är formelbladen från insidan av Pärmen i Adams Calculus, dessa formler bifogas tentan.
Lösningarna skall vara fullständiga och lätta att följa. Börja varje ny uppgift på ny sida.
Använd ej baksidor. Skriv namn på varje inlämnat blad.

1. Vi har skickat iväg en rymdsond till att studera pseudoplaneten Pluto. Sonden analyserar omgivningen kring sin position och kommer fram till att den väldigt nära approximerar grafytan till funktionen $f(x,y) = 0.1x^3 + 0.3y^2 - 0.5xy$. Sonden förflyttar sig och när den är i punkten $(x,y) = (1,1)$ så registrerar den en ljusblixt i riktningen $u = (-3,4)$. Sonden undersöker sina möjligheter att röra sig i den riktningen. Den kan bara köra i en viss riktning om lutningen inte är större än 20%. Utför beräkningar och avgör om det är möjligt för sonden att röra sig i den intressanta riktningen.

2. Beräkna minsta avstånd till origo från ytan $x^2 - y^2 + z = 1$

3. Låt $f(u,v) = u^2 + 3uv^2$, $u = x^3 + xy$, $v = xy^2 + z$, $x = z^2 + w$ och $y = 3w$. Beräkna partialderivatan för f med avseende på z

4. Beräkna volymen av den tetraeder som stängs inne mellan koordinatplanen $x = 0$, $y = 0$ och $z = 0$ och planet
$$x/a + y/b + z/c = 1$$

5. Låt
$$F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$
vara ett vektorfält definierat inom cirkelskivan $D = \{(x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 1\}$. Visa att fältet är konservativt och använd en potentialfunktion för att beräkna linjeintegralen
$$\int_C F \bullet dr$$
där C är det kortare kurvsegmentet av begränsningscirkeln till D från punkten $(3,2)$ till punkten $(2,3)$.

6. Beräkna längden av kurvan $r(t) = (t^3, t^2)$, $-1 \leq t \leq 2$.

7. Visa att
$$\oint_C ydx + zdy + xdz = \sqrt{3}\pi a^2$$
där C är den lämpligt orienterade snittkurvan till ytorna $x^2+y^2+z^2 = a^2$ och $x+y+z = 0$

8. Beräkna flödet för fältet $F = (x^3, 3yz^2, 3y^2z + x^2)$ genom sfären
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Svar till tentamen i Flervariabelanalys, 2013 06 10.

1. Det är precis möjligt för sonden att röra sig mot ljusblixten eftersom lutningen i den riktningen är precis 20 % (eller 0.2 som man också kan skriva)

2. Minsta avståndet är $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3. Mathematica svarar gärna så här:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z} &= 2430w^8z + 9720w^7z^3 + 4374w^7z + 14580w^6z^5 + 8748w^6z^3 + 54w^6 + 9720w^5z^7 + 4374w^5z^5 + \\ &+ 648w^5z^2 + 12w^5z + 162w^5 + 2430w^4z^9 + 1620w^4z^4 + 60w^4z^3 + 972w^4z^2 + 48w^4z + 1512w^3z^6 + \\ &+ 120w^3z^5 + 810w^3z^4 + 144w^3z^3 + 42w^3z + 486w^2z^8 + 120w^2z^7 + 144w^2z^5 + 72w^2z^3 + \\ &+ 18w^2z + 60wz^9 + 48wz^7 + 54wz^5 + 36wz^3 + 12z^{11} + 24z^7\end{aligned}$$

Men se lösningen för ett mer mänskligt svar...

4. Volymen blir $\dfrac{abc}{6}$

5. Linjeintegralen blir noll.
   Potentialen blir $\Phi(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) = \log\sqrt{x^2+y^2}$.

6. $\frac{1}{27}(13^{3/2} + 40^{3/2} - 16)$

7. Svaret är lösningen.

8. $\frac{12}{5}\pi a^5$

Lösningar till tentamen i Flervariabelanalys, 2013 06 10.

1. Eftersom det är sonden som noterar ljusblixten så kan vi anta att riktningen är relativt sonden (dvs i sondens koordinatsystem vars origo är hos rymdsonden). Men man kan även tolka ljusblixtriktningen relativt omgivningens koordinatsystem så att ljusblixtriktningen relativt rymdsonden är $(-3,4)-(1,1)$. Jag accepterar båda tolkningarna, men mina lösningar utgår från att ljublixtriktningen mäts relativt rymdsondens origo. Räkningarna blir likartade.

Vi behöver beräkna riktningsderivatan för funktionen med avseende på ljusblixtriktningen u. Detta kräver att vi först beräknar gradienten för funktionen. Riktningsderivatan får vi sedan genom att beräkna skalärprodukten av gradienten med en enhetsvektor i ljusblixtriktningen. Gradienten:

$$\nabla f = (0.3x^2 - 0.5y, 0.6y - 0.5x) \quad \Rightarrow \quad \nabla f|_{(1,1)} = (-0.2, 0.1)$$

En enhetsvektor i ljusblixtriktningen blir

$$e_u = \frac{(-3,4)}{\sqrt{9+16}} = \frac{(-3,4)}{5}$$

Riktningsderivatan blir alltså

$$D_u f = e_u \bullet \nabla f|_{(1,1)} = \frac{(-3,4)}{5} \bullet (-0.2, 0.1) = \frac{0.6+0.4}{5} = 0.2$$

Lutningen är alltså precis 20% och sonden kan därför just precis klara av att ge sig av för att undersöka mysteriet med den gäckande ljusblixten.

2. Minimum sökes för funktionen $x^2+y^2+z^2$ givet bivillkoret $x^2-y^2+z-1=0$ Vi ställer upp Lagrangefunktionen

$$\begin{aligned}
L(x,y,z,\lambda) &= x^2+y^2+z^2-\lambda(x^2-y^2+z-1) \\
\frac{\partial L}{\partial x} &= 2x - 2\lambda 2x = 0 \quad \Rightarrow \lambda = 1 \\
\frac{\partial L}{\partial y} &= 2y + \lambda 2y = 0 \quad \lambda = 1 \quad \Rightarrow y = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial z} &= 2z - \lambda = 0 \quad \lambda = 1 \quad \Rightarrow z = 1/2 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x^2 - y^2 + z - 1 = 0
\end{aligned}$$

Från första ekvationen får vi att $\lambda = 1$. Sätter vi in detta i den andra ekvationen så får vi att $y=0$ och sätter vi in detta i den tredje ekvationen så fås att $z = 1/2$.

Notera:: En annan möjlighet är att lösa ut λ från den andra ekvationen vilket ger $\lambda = -1$. Sätter vi in detta i ekvation 1 och 3 så får vi att $x=0$ och $z=-1/2$. När vi sedan använder ekvation 4 för att beräkna y så får vi $y^2 = -3/2$ som är omöjligt i det reella rum som vi befinner oss i. Vi måste därför gå vidare med $\lambda = 1$!

Bivillkoret ger oss nu att $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Det ser alltså ut som om vi har två minimipunkter

$$p_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{2}), \qquad p_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{2})$$

Se Figur:

Minsta avståndet från origo till ytan blir därför

$$||p_1|| = ||p_2|| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

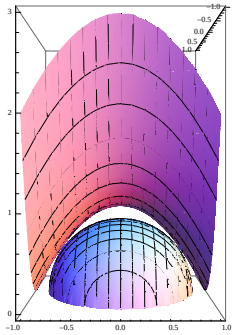

Figure 1: Bilder till minimiproblemet

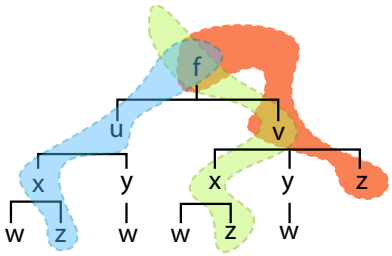

Figure 2: Graf som visar hur funktionen f beror av de olika variablerna och hur funktionen beror av z i synnerhet

3. Vi använder oss av beroende grafen i figur 2, som ger oss f's beroende av z:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} \\ &= (2u+3v^2)(3x^2+y)2z + 6uv\cdot y^2\cdot 2z + 6uv\cdot 1 = \\ &= 12ux^2z + 4uyz + 18x^2v^2z + 6yv^2z + 12uvy^2z + 6uv\end{aligned}$$

Utför vi beräkningarna (vilket mathematica hjälpt mig med) och uttrycker allt i variablerna längst ned i trädet så får vi

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z} &= 2430w^8z + 9720w^7z^3 + 4374w^7z + 14580w^6z^5 + 8748w^6z^3 + 54w^6 + 9720w^5z^7 + 4374w^5z^5 + \\ &+ 648w^5z^2 + 12w^5z + 162w^5 + 2430w^4z^9 + 1620w^4z^4 + 60w^4z^3 + 972w^4z^2 + 48w^4z + 1512w^3z^6 + \\ &+ 120w^3z^5 + 810w^3z^4 + 144w^3z^3 + 42w^3z + 486w^2z^8 + 120w^2z^7 + 144w^2z^5 + 72w^2z^3 + \\ &+ 18w^2z + 60wz^9 + 48wz^7 + 54wz^5 + 36wz^3 + 12z^{11} + 24z^7\end{aligned}$$

Men detta räknade jag inte med att någon skulle svar med.

4. Tetraedern T begränsas uppåt och nedåt av de två funktionsytorna $z = c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y$ och $z = 0$. T är alltså z-enkelt över det triangulära området i xy-planet som som ligger i första

kvadraten men begränsas av linjen $y = b - \frac{b}{a}x$. Integralen för volymen kan därför skrivas som

$$V = \iiint_T dxdydz = \int_0^a \int_0^{b-\frac{b}{a}x} \int_0^{c-\frac{c}{a}x-\frac{c}{b}y} dzdydx =$$
$$= \int_0^a \int_0^{b-\frac{b}{a}} c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}ydydx = \frac{cb}{2a^2}\int_0^a a^2 - 2ax + x^2dx =$$
$$= \frac{cb}{2a^2}[a^3 - a^3 + \frac{a^3}{3}] = \frac{abc}{6}$$

5. För att visa att ett tvådimensionellt fält $F = (F_1, F_2)$ är konservativt så behöver vi bara (eftersom cirkelskivan är enkelt sammanhängande) visa att

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$$

I vårt fall har vi att

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

Vilket direkt ger oss konservativiteten.
Eftersom vi har ett konservatit fält så kan vi hitta en potentialfunktion $\Phi(x, y)$ så att $\nabla\Phi = F$. Integrerar vi F_1 med avseende på x så får vi

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2) + H(y)$$

Deriverar vi denna med avseende på y så får vi

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} + H'(y)$$

Eftersom vi har att detta ska vara lika med $\frac{y}{x^2+y^2}$ så kan vi dra slutsatsen att $H'(y) = 0$ vilket innebär att H är en godtycklig konstant. Vi kan således välja en av dessa konstanter och då väljer vi $H = 0$ vilket ger oss potentialfunktionen

$$\Phi[(x, y) = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2) = \log\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Nu kan vi ägna oss åt att integrera fältet längs det angivna kurvsegmentet. Denna integral beror, tack vara konservativiteten, bara på begynnelse och slutpunkt för kurvan och vi har

$$\int_C F \bullet dr = \Phi(\text{ slutpunkt }) - \Phi(\text{ begynnelsepunkt }) = \Phi((2,3)) - \Phi((3,2)) =$$
$$= \log(\sqrt{4+9}) - \log(\sqrt{9+4}) = \log(\sqrt{13}) - \log(\sqrt{13}) = 0$$

6. Längden av en kurva parametriserad av $r(t) = (x(t), y(t))$ ges av integralen

$$\int \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$$

I vårt fall har vi $x'(t) = 3t^2$ och $y'(t) = 2t$ vilket ger att längden blir[1]

$$\int_{-1}^2 \sqrt{9t^4 + 4t^2}dt = \int_{-1}^2 |t|\sqrt{9t^2+4}dt = -\int_{-1}^0 t\sqrt{9t^2+4}dt + \int_0^2 t\sqrt{9t^2+4}dt$$

[1]kom ihåg att

$$|t| = \begin{cases} -t, & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases}$$

Här gör vi substitutionen $u = 9t^2 + 4$, $du = 18tdt$ vilket gör att integralen blir

$$\frac{1}{18}(-\int_{13}^{4}\sqrt{u}du + \int_{4}^{40}\sqrt{u}du = \frac{1}{18}\left(\underbrace{\int_{4}^{13}\sqrt{u}\ du}_{=\frac{2}{3}u^{3/2}\big|_4^{13}} + \underbrace{\int_{4}^{40}\sqrt{u}\ du}_{\frac{2}{3}u^{3/2}\big|_4^{40}}\right) = \cdots = \frac{1}{27}(13^{3/2} + 40^{3/2} - 16)$$

7. Vi har att snitt kurvan är en cirkel centrerad i origo med radien a^2 belägen i planet $x+y+z = 0$. Med fältet $F = (y, z, x)$ så har vi, tack vare Stokes sats att vår linjeintegral blir

$$\oint_C ydx + zdy + xdz = \iint_S \nabla \times F \bullet NdS$$

Här är S cirkelskivan i planet $x + y + z = 0$ och vi väljer orientering så att

$$N = -\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$

Vi har att

$$\nabla \times F = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y & z & x \end{bmatrix} = -(1, 1, 1)$$

Vår integral blir således

$$\iint_S \nabla \times F \bullet NdS = \iint_S \frac{1}{\sqrt{3}}dS = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \text{ cirkelns area} = \frac{\pi a^2}{\sqrt{3}},$$

som var vad vi skulle visa! Notera hur valet av orientering gjorde att vi fick rätt resultat. Hade vi valt den andra orienteringen skulle integralen blivit negativ. Det är detta val som är det ”lämpliga” valet som vi skulle göra i uppgiften...

8. Flödet genom den sfäriska ytan S ges av

$$\begin{aligned}\iint_S F \bullet dS &= \text{ divergenssatsen } = \iiint_V \nabla \bullet FdV = 3\iiint_V x^2 + y^2 + z^2 dv = \\ &= \text{ sfäriska koordinater } = \int_0^2 \pi \int_0^\pi \int_0^a r^4 \sin\phi drd\phi d\theta = \cdots = \\ &= \frac{12}{5}\pi a^5\end{aligned}$$